

# 超選択則講義

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科<sup>1</sup>

「超選択則討論会」2012年3月14, 15日 東京大学駒場キャンパスにて。  
超選択則についての講義ノート。まだ完成していません。

## 1 超選択則とは

超選択則は、1952年に Wick, Wightman, Wigner の3人が唱えた、量子力学の付加的法則である [1]。Heisenberg, Born, Jordan, Dirac, Schrödinger, von Neumann などが構築し整備した量子力学の大枠を変更したわけではなく、現実の物理と適合するように理論を絞り込んでいるという意味で、「付加的法則」と言った。

何を絞り込んでいるのかというと、測定可能な物理量のクラスを絞り込んでいる。標準的な量子力学では、物理系の状態は Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の単位ベクトルで表され、物理量は  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素で表されることになっている。「物理量」は物理学の概念であり、数学の立場から見れば無定義用語である。「自己共役作用素」は数学の概念であり、数学的定義ははっきりしている。von Neumann は「物理量は自己共役作用素で表される」ことは明言しているが、逆方向の命題「自己共役作用素に対する物理量が存在する」という点については、ちょっと自信のない言い方をしている。

歴史的に見ても面白い点なので引用してみるが、von Neumann の有名な本『量子力学の数学的基礎』（井上・広重・恒藤訳）[3] には、

《量子力学的系の物理量に対して超極大なエルミート作用素を一意的に対応させられることは、我々の知っている通りであるが、それに加えて、これらの対応は一対一である、すなわち、すべての超極大エルミート作用素は現実に物理量に対応している、と仮定するのが都合がよい》

と、さりげなく書かれている。あまりにもさりげなく書かれているので、よほど注意して探さないと見落としてしまうほどである。ここで「超極大なエルミート作用素」は現代の用語では自己共役作用素のことである。物理量が測定可能であるとはどういうことかという物理的条件を吟味することによって、物理量が自己共役作用素で表されることは合理的に示されるが、逆に、任意の自己共役作用素が何らかの物理量に対応しているか？という点に関しては《そう仮定するのが都合がよい》という程度の正当性しか与えられない。例えば、物理量の和がまた物理量になることが示せるといった点が都合がよい（ただし、非有界作用素の場合は自己共役作用素同士を足しても自己共役作用素にならないという問題がある）。

この《...と仮定するのが都合がよい》という表現は von Neumann のドイツ語の原文 (1932年) では《... es ist zweckmässig anzunehmen, ...》と書かれている。Beyer による英訳本 (1955年) では、この部分は《... it is convenient to assume, ...》と訳されている。Wightman (1995年) は《... it is appropriate to assume, ...》と訳した方が原文の意味に近いとしている [2]。

<sup>1</sup>e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

いずれにしても，von Neumann も自信をもって「自己共役作用素と測定可能量は一対一対応する」という公理を掲げていたわけではないが，自己共役作用素と測定可能量は漏れなく一対一対応するという信念というか期待は何となく共有されていったようである．Wick, Wightman, Wigner による超選択則の発見は，この期待は物理学としては間違っているという気づきであった．

自己共役作用素全体の集合と，測定可能物理量全体の集合が一対一対応しないとすれば，一方が他方を包含するような関係にあるのかといった疑問も湧く．その点についてはまた後ほど議論したいが，さしあたって超選択則は，「自己共役作用素が測定可能物理量に対応するための必要条件」である．つまり，超選択則は，自己共役作用素  $A$  に対する

$$A \text{ は測定可能} \Rightarrow A \text{ は超選択則を満たす} \quad (1)$$

という命題として定式化される．対偶は，

$$A \text{ は超選択則を満たさない} \Rightarrow A \text{ は測定不可能} \quad (2)$$

である．Wick, Wightman, Wigner の超選択則が自明でないのは，現実的なモデルにおいて測定可能量のクラスから締め出される自己共役作用素があるからである．

言い訳をたくさん言っておく！「測定可能 (measurable)」という概念もいまの段階では無定義だが，これについては後で議論したい．言葉づかいの問題だが，代数的場の量子論 (algebraic quantum field theory) の文脈では「場の量」全体がなす代数を field algebra  $\mathfrak{F}$  と呼び，「測定可能な場の量」全体がなす代数を observable algebra  $\mathfrak{A}$  と呼んで区別する (包含関係  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$  が成り立つ) が，場の理論に限らない一般的な文脈では「測定可能とは限らない物理量」をたんに「物理量 (quantity, physical quantity)」と呼び，「測定可能な物理量 (measurable quantity)」はいちいち形容詞を付けて言うことにしよう．なお，「有限自由度の量子力学では超選択則は意味がない (要らない，出て来ない)」と言う人もいるが，それも誤解があったり，理論を限定すればの話であったりするもので，ここでは無限自由度場の量子論の文脈に限定せずに超選択則を議論する．

では，超選択則は具体的にはどのように述べられるのか？ 超選択則を特徴付ける作用素  $J$  (superselection charge) があり，自己共役作用素  $A$  が測定可能量ならば

$$[A, J] = 0 \quad (3)$$

を満たす，というのが超選択則 (superselection rule) である．形式的にはこれだけのことである．

超選択チャージ  $J$  は何種類もあり，それに応じて超選択則も何種類もある．ユニヴァレンス超選択則，ゲージ超選択則などが代表的であるが，私はこのラインナップにスケーリング超選択則，パリティ超選択則，ローレンツ超選択則，カラー超選択則を加えたい．

## 2 ユニヴァレンス超選択則

超選択則に慣れるために，ユニヴァレンス超選択則 (univalence superselection rule) がどんなものか見てみよう．超選択チャージ  $J$  として

$$J = e^{2\pi i J_z / \hbar} \quad (4)$$

を採用する．ここで  $J_z$  は角運動量  $z$  成分であり（どの成分でも構わない）， $J$  は  $360^\circ$  の回転を与えるユニタリ作用素である．この場合，超選択則 (3) は

$$J^\dagger A J = A \quad (5)$$

と同等であり，「 $A$  が測定可能ならば  $A$  は  $360^\circ$  回転で不変」であることを要請する．

電子の Dirac スピノル場  $\psi(x)$ （作用素に値を持つ超関数であるが，その点は適当に扱うとして）から作られる

$$\frac{1}{2}(\psi + \psi^\dagger), \quad \frac{1}{2i}(\psi - \psi^\dagger) \quad (6)$$

などは形式的に自己共役作用素であるが，スピノルは

$$J^\dagger \psi J = -\psi, \quad J^\dagger \psi^\dagger J = -\psi^\dagger \quad (7)$$

のように  $360^\circ$  回転で符号が変わってしまう（よく知られた，スピノルの 2 価性）．従って，(6) のような量は測定不可能である．

それに対して，

$$\psi^\dagger \psi, \quad \bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \quad (8)$$

などは  $360^\circ$  回転で不変であり，ユニヴァレンス超選択則をパスして，測定可能物理量である． $\psi^\dagger \psi$  は電子の電荷密度， $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  は電流密度を表す．ただし， $\psi \psi$  という積も  $360^\circ$  回転で不変なのでユニヴァレンス超選択則をパスしてしまうが，これはゲージ超選択則をパスしないので，やはり測定可能量のクラスから除外される．

物理っぽく言い換えると，電子の物質波 (de Broglie wave) の絶対値は測定可能だが，物質波の位相は測定不可能だと言える．電子波が干渉して波が強め合ったり打ち消し合ったりして，電子の存在確率が大きくなったり小さくなったりする様子は観測できるが，それが波の山と山が重なり合って強め合っているのか，谷と谷が重なり合って強め合っているのかは，誰にもわからない．電子波の相対位相を測ることは可能だが，電子波の位相そのものを測ることはできた試しがないのは経験則だし，位相の絶対値を問うこと自体ナンセンスだと物理学者は思っているだろう．しかし，なぜそれを測ることができないのか，という点を明らかにしようというのが私の論点である．

測定可能性に関して，電子の波は，光子に対する波動である電磁波とは性質が大きく異なることに注意してほしい．電磁波は振幅の絶対値も位相も測定可能である．少なくともラジオ波からマイクロ波くらいまでの周波数域では，望む位相の電磁波を用意できるし（加速器の加速管はマイクロ波の位相を調節して荷電粒子ビームを加速している），受信した電磁波の位相を測ることもできている（NMR の検波ではこれをやっている）．要するに電磁波の山と谷は見分けがつく．アンテナとはそういう仕掛けである．位相が測れる・測れないの違いは，光子には光子数保存則がなく，電子は電荷保存則があることに起因している．起因というか，言い換えに過ぎないのかもしれない．この背後にはゲージ不変性という深い理由がある．そのことを測定過程の理論を通して見ていくのが本講義の狙いである．

ユニヴァレンス超選択則が発見された経緯は Wightman[2] に詳しく書かれている．元はと言えば 1950 年頃に，Dirac 場のパリティ変換

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Pi \psi(\mathbf{x}, t) := e^{i\theta} \gamma^0 \psi(-\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

において、位相因子  $e^{i\theta}$  の不定性があることが問題視されたことが議論の発端である。パリティ変換に関して、スカラー場と擬スカラー場の区別があり、極性ベクトル場と軸性ベクトル場の区別があるように、スピノル場も位相因子によって区別すべき種類があるのではないかと、ということが問題になったのである。Yang, Tiomno, Zharkov らは、変換行列の行列式の値は 1 でなければならないという、今から見るとよくわからない理由を付けて、因子の候補を  $\pm 1, \pm i$  に絞った。当時、スピン  $\frac{1}{2}$  の粒子としては  $p, n, \mu^\pm, e^\pm, \nu, \bar{\nu}$  などが知られていたもので、これらの粒子に  $\pm 1, \pm i$  のどのパリティ因子を割り当てるべきかということ Fermi や Yang や Wigner たちが議論していたのである。その議論の中で、Wigner, Wick, Wightman は、そもそも Dirac 場  $\psi$  そのものが測定できる量ではないので、そのパリティ変換性を実験的に判定できないし、理論として一意的に決まらなくてもよいということに気づいたのである。

ユニヴァレンス超選択則は、「フェルミ作用素の奇数個の積は測定不可能だ」という規則に言い換えられる。Wick と Wigner は fermion-boson superselection rule と呼ぶことを好んだらしいが、Wightman が univalence superselection rule という名称がよいと押し通したようである [2]。

### 3 超選択則と選択則

ハミルトニアン  $H$  に対して

$$[H, J] = 0 \quad (10)$$

という条件は  $J$  の保存則だが、超選択則は  $J$  がすべての測定可能量  $A$  と可換である

$$[A, J] = 0 \quad (11)$$

と言っている。 $J$  に対する条件という意味では、超選択則は保存則が極端に強くなったケースと考えられる。

$J|j\rangle = j|j\rangle$  を満たす  $J$  の固有ベクトル  $|j\rangle$  があると、 $[H, J] = 0$  という式は、

$$0 = \langle j|[H, J]|j'\rangle = (j' - j)\langle j|H|j'\rangle \quad (12)$$

を意味する。つまり、 $\langle j|H|j'\rangle \neq 0$  ならば  $j = j'$  である。ハミルトニアンの作用で遷移が起こり得る始状態と終状態において  $J$  の値は等しくなければならない。

前期量子論の原子スペクトルの理論の頃から選択則 (selection rule) という名前はあったと思うが、これも保存則の一つの言い表し方である。原子が 1 光子を放出する際には原子の角運動量は  $\pm 1$  または 0 の変化しかしない、1 光子放出で角運動量が  $\pm 2$  も変化するような遷移は起きない、という具合に「実際に起こる量子状態遷移を選ぶ、あるいは制限する規則」は選択則と呼ぶのがふさわしい。そして、その内実は、原子と光子を合わせた全系の角運動量保存則である。

保存則ないし選択則は「時間発展で  $J$  の値が変わらない」ことを主張するが、超選択則は「観測可能な、どのような操作によっても  $J$  の値が変わらない」ことを主張する。そうした性質から、「とても強い選択則」という意味を込めて超選択則と呼ぶのだろう。しかし、覚え方としては、「超選択則は、理論的に存在し得る物理量のうち、測定可能な物理量を選ぶ規則だ」と覚えるのがよいと思う。

## 4 純粋状態と混合状態

超選択則の意味を理解するために、純粋状態と混合状態の分類をはっきりさせておく必要がある。また、状態ベクトルと状態を切り分けて理解しておく必要もある。状態という概念を規定するには、測定可能物理量代数という概念を規定しておかないといけない。うっかりすると堂々巡りになる恐れがあるので、それを避けるために代数的量子論では、まず測定可能物理量代数は定まっていると仮定する。そうすると混合状態も超選択則も論理的に後付け的に決まる。そういうアプローチで整合的な理論構成ができるが、何が測定可能であるかということを決める原理がわかっていない段階で測定可能代数があるというのも奇妙である。また、実際の物理実験には、変更可能な解像度・分解能があり、それに応じて測定可能な範囲もズームアップしたりダウンしたりして融通無碍に変わり得るので、「測定可能代数が初めから定まっているアプローチ」は物理の実情に即していない。測定可能代数と超選択則はむしろ双対な関係にあるものであって、相互規定的なものとして了解した方がよいと思う。また、測定可能代数と純粋・混合状態の概念も双対的なものである。

現段階ではわかりにくい文句をつぶやいてしまったが、ともかくも測定可能代数と状態の概念を規定しよう。

$C^*$  代数の定義と状態の定義・状態の混合則・状態空間は凸空間・純粋状態と混合状態の定義・状態とベクトルの対応・GNS 構成・部分代数・制限状態・

可換代数と指標の定義・Gelfand-Naimark 双対・

ある代数に対して純粋な状態も部分代数に制限すると混合状態に見える。逆に、代数の拡大によって混合状態が純粋状態に見直される。

重ね合わせ状態だから干渉が起こると言うよりは、非可換物理量があるから干渉が見えると言う方がよいと思う。

## 5 超選択則のいろいろな言い換えバージョン

### 5.1 重ね合わせの禁止則（これらの解釈はやめた方がよい）

重ね合わせの禁止？重ね合わせでも無関係？純粋状態の混合状態化？coherent subspace？波束の収縮解釈？全宇宙の超選択チャージの値は決まっている？

### 5.2 位相不定性の拡張（これらの解釈は残しておいてよい）

測定可能物理量が同時ブロック対角化可能・state vector が over-all phase の不定性を持つだけでなく、block ごとの phase 不定性を持つ。Wick たちの元々の言い方はこれに近い。デコヒーレンスの考えもこれに近い。超選択則がデコヒーレンスの種と考えられたこともあった（町田・並木・荒木）。Zurek の考え方はどうなのだろう？

## 6 セクターと相

### 6.1 代数的定式化

algebra of bounded operators  $B(\mathcal{H})$ .

$S \subset B(\mathcal{H})$  の commutant (可換子環)  $S' = \{C \in B(\mathcal{H}) \mid \forall A \in S, AC = CA\}$ .

定理:  $S \subset S'', S' = S'''$ .

von Neumann algebra  $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H}), \mathcal{M} = \mathcal{M}''$ .

代数  $\mathcal{A}$  の center  $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ .

C\* 代数  $\mathcal{A}$  の表現  $(\pi, \mathcal{H})$  に付随する von Neumann 代数  $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})''$ .

C\* 代数  $\mathcal{A}$  の表現  $\pi$  が factor 表現 (既約表現と同義)  $\Leftrightarrow \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$ .

sector (factor 表現の準同値類)  $\Leftrightarrow Z(\pi(\mathcal{A})'') = \pi(\mathcal{A})' \cap \pi(\mathcal{A})'' = \mathbb{C}1$ .

factor は表現の可換子環が自明な表現, sector は表現の中心が自明な表現. 素朴な言い方をすれば factor は既約表現, sector は同値な既約表現の直和で書ける表現のクラス.

2つの表現  $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2)$  が互いに素 (disjoint; 私は「互いに素」よりも「不通」という訳をお勧めする)  $\Leftrightarrow \pi_1$  のどの部分表現も  $\pi_2$  の部分表現と同値でない.

2つの表現  $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2)$  が準同値 (quasi-equivalent)  $\Leftrightarrow \pi_1$  のどの部分表現も  $\pi_2$  と素ではなく,  $\pi_2$  のどの部分表現も  $\pi_1$  と素ではない.

Order parameters =  $Spec(Z(\pi(\mathcal{A})''))$

quasi-equivalent representation, disjoint representation, superselection charge, phases and order parameters

### 6.2 構成的アプローチから見たセクター

Lanford, Ruelle の無限遠方の物理量 (observable at infinity). 秩序パラメーター. 相. 古典力学変数の創発.

### 6.3 局所場の理論のセクター

DHR (Doplicher-Haag-Roberts) analysis, DR (Doplicher-Roberts) category

### 6.4 有限自由度系には超選択則はないのか?

有限自由度 CCR 代数の既約表現はすべてユニタリ同値. 有限自由度 CCR 系の sector は一つしかない. 非自明な超選択則はない.

世の中, CCR がすべてか? CCR で書けない系はある. スピン系は CCR ではない.

有限自由度系で非同値既約表現を持つ例. 円周上の量子力学. 外場・境界条件としての超選択則. Mackey's imprimitivity system. 光子には位置がない.

表現 Hilbert 空間を決めた後で超選択則を議論するのはナンセンスか? 物理の実情として, どの作用素が観測可能量になるか, あらかじめわかっているわけではない. むしろ測定不可能かもしれない量まで入れて表現空間を作る方がやりやすい. 状態を決めてから表現を GNS 構成すれ

ばよいというのはその通りだが，表現を決めてから状態を作る方がずっと楽．例えば調和振動子の coherent state を Fock 表現空間のベクトルから定めるのは簡単だが，Fock 表現に頼らずに初めから期待値汎関数として coherent state を定義することができるだろうか？あるいは水素原子の  $|nlm\rangle$  ベクトルやそれらの重ね合わせベクトルに相当する状態を表現に頼らずに期待値汎関数として定められるだろうか？GNS 構成というのは「絵に描いた餅」であり，実用向きではない．

「Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の次元が等しければ  $B(\mathcal{H})$  は同値であり， $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素は  $B(\mathcal{H})$  に affiliate している」そりゃそうだが，それは物理的意味があるとは思えない statement.  $B(\mathcal{H})$  を見ている，それがスピン系なのか，ボソン系なのか，フェルミオン系なのかすらわからない．物理では，有界作用素全体よりも，非有界であってもかまわないが生成子が何であるかということと，生成子の多項式・有理式で書ける程度の物理量が大事．

私が量子論理をあてにしていない理由．物理量が何であるか定義せずに Yes/No question をすべての出発点にしようとするのはナンセンス！「エネルギーが 3eV 以上かつ 4eV 以下である」という命題を，エネルギーという物理量を定義する以前に述べることはできない．また，射影作用素の代数は表現を決めないと積も meet も join も計算できない．物理量代数は表現を決めなくてもかなりのところまで計算を進められるし，状態を決めれば表現が決まるという分節がクリアにできる．

## 7 測定理論から見た超選択則

測定理論と対称性からの導出．対称性の破れ．階層構造．この章の内容は数研講究録 [23] と同内容．

### 7.1 測定過程のフォンノイマンモデル

一般論を展開する前に，von Neumann が定式化した測定過程のモデルを説明する [3]．正準交換代数で記述される 2 つの量子系を用意する．一方が測られる対象系であり，位置  $q$  と運動量  $p$  を持つ．他方が測定器役の系であり，位置  $Q$  と運動量  $P$  を持つ．やりたいことは， $q$  を測ることである．我々は  $q$  の値を直接知ることができないが， $Q$  の値を読み取ることはできるとする．それなら， $q$  の位置に合うように  $Q$  が動けばよい．対象系と測定器の相互作用・時間発展は Heisenberg operator を定める写像

$$\alpha_t : A \mapsto \alpha_t(A) = U_t^\dagger A U_t \quad (13)$$

で記述される．この代数自己同形写像  $\alpha$  によって

$$Q \mapsto \alpha(Q) = Q + q \quad (14)$$

という変化が起きれば，そして相互作用以前の  $Q$  の期待値  $\omega(Q)$  を知っていれば，相互作用後の  $\alpha(Q)$  を測ることによって，目盛りの差分  $\alpha(Q) - \omega(Q)$  から対象系の位置  $q$  を求めることができる．具体的なハミルトニアンと時間発展変換を

$$H := KqP, \quad U_t := e^{-iHt/\hbar}, \quad Kt/\hbar = 1 \quad (15)$$

与えれば， $[Q, P] = i\hbar$  から  $\alpha(Q) = Q + q$  が導かれ，(14) のような所望の指針シフトが得られる．

測定のためには，ミクロ対象系とマクロ測定器の相互作用を通じて，ミクロ系の物理量の値にマクロ系の物理量の値を追従させる機構が必要だ，という点に注目してほしい．また，マクロ測定器もミクロ系と接触・相互作用する場面では量子力学で記述できるという点にも注目してほしい．

このモデルでは，対象系の運動量  $p$  は，測定過程後に

$$\alpha(p) = U^\dagger p U = p - P \quad (16)$$

に変化する．より一般的に考えても， $U$  の表式には  $q$  が含まれるので（そうでないと  $q$  の測定にならない）， $U$  と  $p$  は非可換であり， $U^\dagger p U \neq p$  となる．つまり，位置  $q$  を測るとき運動量  $p$  の変化は避けられない．荒っぽい言い方ではあるが，これは不確定性関係の一種である．この命題の対偶から， $p$  をまったく変化させない方法では  $q$  は測れないと言える．運動量保存則と位置の測定は両立し得ない関係にある．ここに超選択則の萌芽がうかがえる．

## 7.2 保存量 vs. 測定可能量

もう一つ，保存則と測定が両立しないケースを示す．対象系は  $n$  個の質点からなる系で各質点の質量・位置・運動量を  $m_r, q_r, p_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) とする．測定器は物理量  $M$  (meter, pointer, indicator) を持つとする．測定過程は物理量代数の自己同形写像  $\alpha$  で表され，測定前の任意の物理量  $B$  は測定過程後には  $\alpha(B) = e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar}$  に移される．測定過程は von Neumann モデルよりも一般的なものとしてよいが，対象系の運動量の総和は保存すると仮定する：

$$p_x := \sum_{r=1}^n p_r, \quad \alpha(p_x) = p_x. \quad (17)$$

この場合，質点系の重心座標

$$x := \frac{\sum_{r=1}^n m_r q_r}{\sum_{r=1}^n m_r} \quad (18)$$

は，以下に説明する意味で，測れない．もしも， $x$  に合わせて  $M \mapsto \alpha(M) = M + x$  と変動する物理量  $M$  があったとする． $M$  自身は測定器の物理量代数に属する量なので，対象系の任意の物理量  $A$  と可換  $[A, M] = 0$  である．従って対象系の全運動量  $p_x$  に対しても  $[p_x, M] = 0$  である．測定過程  $\alpha$  は代数の自己同形写像だから，

$$[\alpha(p_x), \alpha(M)] = \alpha([p_x, M]) = 0 \quad (19)$$

が成り立つ．一方で， $[x, p_x] = i\hbar$  であり，(17) で  $\alpha(p_x) = p_x$  を要請し，また  $\alpha(M) = M + x$  を仮定したので，

$$[\alpha(p_x), \alpha(M)] = [p_x, M + x] = -i\hbar \quad (20)$$

が導かれるが，これは (19) と矛盾する．以上より，対象系の全運動量を保ち，かつ，測定器の物理量  $M$  を対象系の重心の位置  $x$  に対して  $\alpha(M) = M + x$  のように連動させる測定過程  $\alpha$  は存在しない，と結論できる．

問題を拡張して， $x$  の非自明な関数  $f(M, x)$  について  $\alpha(M) = f(M, x)$  かつ  $\alpha(p_x) = p_x$  となることを要請しても，やはりそのような  $\alpha$  はないことが証明できる．



通常，運動量保存則とは，部分系ではなく系全体の運動量の総和が時間とともに変化しないことを言うのだが，この例では対象系だけで運動量保存則が閉じていることに注意してほしい．

この例から，保存量  $p_x$  に対して非可換な量  $x$  は測定不可能だ，という教訓が得られる．対偶を言うと，ある量が測定可能であるためには保存量  $p_x$  と可換でなければならないことになる．例えば，2つの質点の相対座標  $q_r - q_s$  は  $p_x$  と可換であり，運動量保存則に抵触せずに測定可能である．

保存則は対称性（変換則と不変性）と深く関わっているが，以上の検討例から，ある量が測定可能か否かという判定条件は対称性と深く関わるのが予期される．非可換な量の保存則と誤差なし測定とは両立しないことは Wigner-Araki-Yanase-Ozawa の定理として知られているが，それを極限まで強めたものが超選択則だと言える．

### 7.3 被測定量と指針量の共変性

「間接的に測れる」とはどういうことかももう少し詰めて考えよう．マイクロ系の物理量（被測定量）を  $A$  とし，その読み取り役としてのマクロ系物理量（指針量）を  $M$  としよう． $M$  の値を読み取る方法はあると仮定する．問題は  $M$  の読み取り値が  $A$  の値を反映しているかどうかである．これでもまだ数学的定義としては穴があるが，「測定可能」という概念を次のように規定したい：(i)  $M$  の値から  $A$  の値を一意的に決める理論的もしくは経験的方法がある場合，我々は  $M$  によって  $A$  を確実に測れるという．(ii)  $M$  の値から  $A$  の値を一意的には決められなくても，0 でない確率で推定できる場合， $M$  によって  $A$  を推測できるという．(iii)  $M$  の値と  $A$  の値が統計的にもまったく無関係である場合， $M$  によって  $A$  を測れないという．

間接測定において肝心なことは指針量が被測定量に連動していることである．von Neumann のモデルで言えば，任意の長さ  $b$  による対象系の位置  $q$  の移動を

$$\sigma_b(q) := e^{ipb/\hbar} q e^{-ipb/\hbar} = q + b, \quad (21)$$

指針  $Q$  の移動を

$$\tau_b(Q) := e^{iPb/\hbar} Q e^{-iPb/\hbar} = Q + b \quad (22)$$

と書くと，測定過程前の  $Q$  は  $\sigma_b$  では動かないが，測定過程後の  $\alpha(Q) = Q + q$  は対象系に連動して  $\sigma_b(\alpha(Q)) = Q + q + b$  に移動する．この連動性

$$\begin{aligned} e^{ipb/\hbar} e^{iHt/\hbar} Q e^{-iHt/\hbar} e^{-ipb/\hbar} &= e^{iHt/\hbar} e^{iPb/\hbar} Q e^{-iPb/\hbar} e^{-iHt/\hbar} \\ \sigma_b(\alpha(Q)) &= \alpha(\tau_b(Q)) \end{aligned} \quad (23)$$

は共変性 (covariance) と呼ばれ，間接測定が機能しているために成り立っていてほしい条件である．いまの場合，この等式は，

$$Q + (q + b) = (Q + q) + b \quad (24)$$

と確認できる．

## 7.4 測定過程の対称性

対象系（測定される系）の物理量代数を  $\mathcal{A}$ ，測定器の物理量代数  $\mathcal{M}$  とする．群  $G$  の各元  $g \in G$  が  $\mathcal{A}$  に代数自己同形  $\sigma_g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  で作用し， $\mathcal{M}$  にも代数自己同形  $\tau_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  で作用しているとすると：

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1 g_2}, \quad \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2}, \quad g_1, g_2 \in G. \quad (25)$$

測定過程は，対象系と測定器を併せた複合系のテンソル積代数の自己同形  $\alpha : \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$  である．またテンソル積代数にも群作用は拡張できて， $\sigma_g \otimes \tau_g, \sigma_g \otimes \text{id}, \text{id} \otimes \tau_g$  はいずれも写像  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$  を定める．このとき，任意の  $g \in G$  に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ \sigma_g \otimes \tau_g \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \tau_g \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \end{array} \quad (26)$$

が成り立つならば，測定過程  $\alpha$  が  $G$  不変性を持つと言う． $G$  について総和保存則 (total conservation law) が成り立つとも言う．

保存則と呼ぶ理由：自己共役物理量  $J \in \mathcal{A}, K \in \mathcal{M}$  を生成元として 1 パラメータ  $s \in \mathbb{R}$  を持つ群作用が

$$\sigma_s(A) = e^{iJs/\hbar} A e^{-iJs/\hbar}, \quad \tau_s(M) = e^{iKs/\hbar} M e^{-iKs/\hbar} \quad (27)$$

とユニタリ実現され，時間発展  $\alpha_t(B) = e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar}$  はハミルトニアン  $H$  でユニタリ実現されているとする．このとき，

$$[H, (J + K)] = 0 \quad (28)$$

が成り立つならば， $\alpha_t(J + K) = J + K$  すなわち保存則が成り立ち，任意の  $B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}; s, t \in \mathbb{R}$  に対して

$$\alpha_t((\sigma_s \otimes \tau_s)(B)) = (\sigma_s \otimes \tau_s)(\alpha_t(B)) \quad (29)$$

すなわち (26) が成り立つ．

総和保存則とは別に，任意の  $g \in G$  について可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ \sigma_g \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \text{id} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \end{array} \quad (30)$$

が成り立つならば，測定過程は対象系で閉じた  $G$  不変性を持つ，あるいは孤立保存則 (isolated conservation law) を満たすと言う．この場合は (28) の  $[H, (J + K)] = 0$  の代わりに

$$[H, J] = 0 \quad (31)$$

を要請する．

## 7.5 共変測定

測定器の物理量  $M$  に関して可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(\mathbf{1} \otimes M) \\
 \text{id} \otimes \tau_g \downarrow & & \downarrow \sigma_g \otimes \text{id} \\
 \mathbf{1} \otimes \tau_g M & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(\mathbf{1} \otimes \tau_g M) = \sigma_g(\alpha(\mathbf{1} \otimes M))
 \end{array} \quad (32)$$

が成り立つならば,  $M$  は共变的指針量 (covariant indicator) であると言う. これは (23) の von Neumann モデルのメーター  $Q$  の性質  $\sigma_b(\alpha(Q)) = \alpha(\tau_b(Q))$  を一般化した条件式である.

総和保存則・孤立保存則・共变的指針量はそれぞれ別の概念である.

## 7.6 物理量の等号 vs. 測定値の等号

$A$  は測定前の対象系の物理量,  $\alpha(M)$  は測定過程の後の測定器の物理量である. 素朴には間接測定は  $A = \alpha(M)$  とすることを目指すのだが, 物理量 (演算子) として系の状態に無関係に両者が等しいことを要請するのは過剰な要求である. 状態を決めれば, 物理量のスペクトル値の一部が測定値として顕在化するが, すべてのスペクトル値が顕在化するわけではない. 出現確率 0 のスペクトル値に関してまで両者が等しくなっている必要はない. 「物理量の等号」を弱めた概念として「出現する測定値の等号」の概念があった方がよい.

「測定値の等号」に相当する概念として, 小澤正直氏 [15] は完全相関 (perfect correlation) という概念を導入した. Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の 2 つの自己共役作用素  $A, B$  がスペクトル分解

$$A = \int \lambda E^A(d\lambda), \quad B = \int \lambda E^B(d\lambda) \quad (33)$$

を持つとする. ここで  $E^A, E^B$  はスペクトル測度. 状態ベクトル  $\psi \in \mathcal{H}$  において, 任意の Borel 集合  $\Delta \subset \mathbb{R}$  に対して

$$E^A(\Delta)\psi = E^B(\Delta)\psi \quad (34)$$

が成り立つならば, 状態  $\psi$  において  $A$  と  $B$  が完全相関にある (perfectly correlated in the state  $\psi$ ) と言う. この関係が成り立っていれば, 状態  $\psi$  において  $A$  と  $B$  は同時測定可能であり,  $A$  の測定値が  $\Delta$  内にあれば  $B$  の測定値も  $\Delta$  内にあり, その逆も言える. この関係を

$$A \equiv_{\psi} B \quad (35)$$

と書き,  $\equiv_{\psi}$  を小澤の等号と呼ぶ. 小澤の等号は (i) 反射律:  $A \equiv_{\psi} A$ , (ii) 対称律:  $A \equiv_{\psi} B \Rightarrow B \equiv_{\psi} A$ , (iii) 推移律:  $A \equiv_{\psi} B, B \equiv_{\psi} C \Rightarrow A \equiv_{\psi} C$  を満たす. 従って, 小澤の等号は物理量の同値関係である.

小澤の等号は GNS (Gelfand-Naimark-Segal) 表現 [6] を使えば以下のように表される. 状態ベクトル  $\psi \in \mathcal{H}$  に伴う状態 (state)  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\omega(A) := \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (36)$$

という線形関数と定める．ここで  $B(\mathcal{H})$  は  $\mathcal{H}$  上の有界作用素全体．状態  $\omega$  の定義域を  $A, B$  で生成される部分代数  $\mathcal{G}(A, B)$  に制限して，この代数の GNS 表現を  $\pi_\omega$  とすると，小澤の等号は

$$\pi_\omega(A) = \pi_\omega(B) \quad (37)$$

と同値であることが小澤氏自身によって証明されている．

例えば 4 次行列と状態ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

( $c_1, c_2 \neq 0$ ) についての GNS 表現は， $\mathcal{H}_\omega = \mathbb{C}^2$  を表現空間とし，

$$\pi_\omega(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \pi_\omega(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (39)$$

となる．状態ベクトル  $\psi$  についての小澤の等号は  $\pi_\omega(A) = \pi_\omega(B)$  を意味する． $A \neq B$  でも  $\pi_\omega(A) = \pi_\omega(B)$  となることはあり得る．

対象物理量  $A$  と測定過程後の指針量  $\alpha(M)$  の「測定値の等号」を定めるにはこうすればよい． $A$  と  $\alpha(M)$  が生成する代数を  $\mathcal{G}(\subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{M})$  とおき，対象系の初期状態を  $\omega$ ，測定系の初期状態を  $\varrho$  とし，複合系の状態  $\nu = \omega \otimes \varrho$  に関する  $\mathcal{G}$  の GNS 表現を  $\pi_\nu: \mathcal{G} \rightarrow B(\mathcal{H}_\nu)$  としたとき，

$$\pi_\nu(A) = \pi_\nu(\alpha(M)) \quad (40)$$

が成り立てばよい．このとき  $A$  と  $\alpha(M)$  の出現値はつねに一致するので，状態  $\nu$  における測定値に関しては  $A$  と  $\alpha(M)$  は等しいと言える．これを

$$A \equiv_\nu \alpha(M) \quad (41)$$

と書く．

## 7.7 主定理：超選択則の導出

測定過程が群  $G$  の作用に関して孤立保存則を許容するならば，対象系の任意の初期状態に関して共变的に測定可能な量  $A$  は，群  $G$  の作用の下で不変である．

証明：対象系と測定系を併せた複合系の初期状態を  $\nu = \omega \otimes \varrho$  とする．いま，測定過程のスキーム  $\Delta(\alpha, A, M, \nu)$  と群作用  $(G, \sigma, \tau)$  が用意され，測定前の物理量  $A$  と測定過程後の指針量  $\alpha(M)$  の間で  $A \equiv_\nu \alpha(M)$  が成り立つことを要請している．群作用を施したものについても測定値の等号  $\sigma_g A \equiv_\nu \alpha(\tau_g M)$  を要請する．測定過程における指針の共変性は  $\alpha(\tau_g M) = \sigma_g(\alpha M)$  をもたらす．また，孤立保存則より  $\sigma_g \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_g$ ．以上より，

$$\sigma_g A \equiv_\nu \alpha(\tau_g M) \equiv_\nu \sigma_g(\alpha M) \equiv_\nu \alpha(\sigma_g M). \quad (42)$$

小澤の等号は推移律を満たすことに注意．しかも  $M = \mathbf{1} \otimes M$  と  $\sigma_g \mathbf{1} = \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  は対象系物理量の単位元) だから

$$\alpha(\sigma_g M) = \alpha(\sigma_g(\mathbf{1} \otimes M)) = \alpha(\mathbf{1} \otimes M) \quad (43)$$

となり, (42) の等号関係は  $g \in G$  によらない．従って

$$\sigma_g A \equiv_\nu A \quad (44)$$

が複合系の状態  $\nu = \omega \otimes \rho$  について成立する．任意の対象系状態  $\omega$  に関してこれが成り立つとすると (通常の実験では, 測定器の初期状態はやたらと変えないが, 対象系の状態はいろいろ変えてみるものなので, この要請は物理的に見て過大要求ではない), 結局

$$\sigma_g A = A \quad (45)$$

である．すなわち  $A$  は  $G$  の作用で不変である (証明終わり) ．

物理的意味：ミクロ系だけで閉じた強固な保存則があると, その保存量に対して非可換な物理量は系の外から測れない, 測定可能な量は孤立保存量に対して可換な量に限られる, という主張が超選択則である．これは不確定性関係の極端なケースとも言える．測定には擾乱がつきものだが, 保存量の擾乱が許されない状況では非可換量の測定は不能に陥るのである．また, 超選択則は天下りの規則ではなく, 力学的な理由と必然性があることをこの定理は示している．対称性は天下りのに与えられるものではなく, 力学によって裏付けされるものであるという趣旨のことを Georgi [16] も書いている．

## 7.8 ゲージ超選択則

例としてボソン系の代数  $\mathcal{A}$  のゲージ対称性に伴う超選択則を考えよう．生成消滅演算子  $A_j^\dagger, A_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) が交換関係

$$[A_j, A_k] = 0, \quad [A_j^\dagger, A_k^\dagger] = 0, \quad [A_j, A_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad (46)$$

を満たす．さらに任意の  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathcal{A}$  に対して

$$N := \sum_{j=1}^n A_j^\dagger A_j, \quad \sigma_\theta(B) := e^{iN\theta} B e^{-iN\theta}, \quad (47)$$

とおくと,

$$\sigma_\theta(A_j) = e^{-i\theta} A_j, \quad \sigma_\theta(A_j^\dagger) = e^{i\theta} A_j^\dagger \quad (48)$$

が成り立つ．絶対値が 1 の複素数全体の集合

$$U(1) := \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \quad (49)$$

は掛け算に関して群をなし, 写像  $\sigma : e^{i\theta} \mapsto \sigma_\theta$  は群  $U(1)$  の代数  $\mathcal{A}$  上の作用を定める．この作用をゲージ変換と呼ぶ． $N$  を全ボソン数あるいは電荷と呼ぶ．

$N$  が孤立保存量だとする．つまり，この系を他の系と接触させて相互作用させても，測定過程  $\alpha$  は  $\alpha(N) = N$  を満たすとする．このとき  $A_j + A_j^\dagger$ ,  $i(A_j - A_j^\dagger)$  は自己共役だがゲージ不変でなく，超選択則によれば測定不可能である．一方で，

$$\frac{1}{2}(A_j^\dagger A_k + A_k^\dagger A_j), \quad \frac{1}{2i}(A_j^\dagger A_k - A_k^\dagger A_j) \quad (50)$$

などがゲージ不変な自己共役量であり，超選択則によって測定可能性を許される．

物理的な例として，超伝導系に対して  $A_j$  は Cooper 凝縮と呼ばれる物理量を表しているし，超流動系に対しては  $A_j$  は Bose-Einstein 凝縮と呼ばれる物理量を表している．ゲージ超選択則のため  $A_j$  そのものは測定できないが，Cooper 凝縮の個数に相当する  $A_j^\dagger A_j$  や，Cooper 凝縮の位相差に相当する  $A_j^\dagger A_k$  は測定可能である．2つの超伝導体が接触したときに流れる Josephson 電流は，この位相差に比例する電流である．一塊の超伝導体内でも Cooper 凝縮の位相の空間勾配に比例する電流が生じるが，これが超伝導電流である．

超選択則の主張をもう一度言おう．ミクロ系で電荷保存則が成立していれば，ミクロ系のゲージ変換に連動してマクロ測定器の指針量を動かすような測定過程は存在しない．この意味で，ゲージ変換で非自明な変換を受けるミクロ物理量は測れない．電荷保存則は，いままでに破れたことのない，最も厳格な物理法則の一つである．ということは，我々には測る手段のない，ミクロの世界のみに存在する物理量があるということになる． $A_j$  や  $A_j A_k$  などがそういう物理量である．

余談：Feynman は学生だった頃，講義中に「これは電子を創る演算子です」と先生が言ったとき「どうやって電子を創るんですか？電荷保存則に反するじゃないですか！」と言って，生成消滅演算子の理論を学ぶのをやめてしまった（そして自己流の量子論を作り上げた）というエピソードがある（Feynman 自身が Nobel 賞講演でそう語っている [17]）．たしかにそんなものが見つかったら電荷保存則に反する．だからこそ電子の生成消滅演算子は我々には観測されないようになっている，つじつまが合っているのである．

## 7.9 カラーの閉じ込め問題を全然知らない人のために

現在の素粒子の標準理論では，陽子や中性子などはクォークと呼ばれる基本粒子から構成されていることになっている．クォークは u (up), d (down), c (charm), s (strange), t (top), b (bottom) の6種類があり，例えば陽子は uud, 中性子は udd, パイ中間子は  $u\bar{d}$  というクォークの複合系とされる．クォークの複合粒子はハドロンと総称される．

クォークは強い相互作用と呼ばれる力で結合している．強い相互作用はグルオンという粒子の放出・吸収によって媒介される．この力学は  $SU(3)$  を構造群とするファイバー束の接続の理論に対する場の量子論（量子色力学, Quantum Chromodynamics, QCD と呼ばれる）で記述される．QCD ではクォークは  $SU(3)$  の定義表現，グルオンは  $SU(3)$  の随伴表現に従う．クォークの複合粒子はテンソル積表現を既約分解した表現に従うことになるが，現実のハドロンはつねに自明表現に従う． $SU(3)$  の非自明な表現は「カラーを持つ」と言われる．その感覚で言えば， $SU(3)$  の自明表現に従うハドロンは「無色」ということになる．

しかも実験観測では，クォークもグルオンも単独の粒子として取り出されたことはない．つまり，クォークもグルオンもつねにハドロンの中に閉じ込められているらしく，我々には「無色」の

粒子だけが見つかる．この経験事実を「カラーの閉じ込め」(color confinement) という．QCD などの基礎理論からカラーの閉じ込めを演繹しようという問題は，素粒子論の積年の課題であるが，万人が納得のいく解答は得られていない．

## 7.10 カラーの閉じ込めの証明(？)

カラーは群  $G = SU(3)$  の対称性に伴う保存量であり， $SU(3)$  のリー代数の元でもある．カラーはミクロ系で孤立保存則を満たしている．ゆえに超選択則が適用されて，測定可能量は  $SU(3)$  不変量でなくてはならない．クォークやグルオンの場合は  $SU(3)$  の非自明な変換を受けるので測定不可能である．また， $SU(3)$  は非可換群であり，カラー自身もまた  $SU(3)$  の随伴表現に従って非自明な変換を受ける．ゆえにカラーは測定可能量ではない．

カラーに似た量として電荷があるが，電荷は  $U(1)$  対称性に伴う孤立保存量である．ゆえに超選択則が適用されて，測定可能量は  $U(1)$  不変量でなくてはならない．電子のスピンル場や荷電パイオンのスカラー場は  $U(1)$  不変ではないのでこれらは測定不可能である．しかし  $U(1)$  は可換群なので電荷そのものは  $U(1)$  不変量であり測定可能である．また，電磁場そのものも  $U(1)$  不変量なので測定可能である．従って光子は閉じ込められない．電子の場合は測定できないが，電子の電荷やエネルギーは測定できる．

## 7.11 対称性の自発的破れ

角運動量は非可換群  $SO(3)$  に伴う保存量であり， $SO(3)$  のリー代数の元でもあり， $SO(3)$  の随伴表現に従うので， $SO(3)$  作用の不変量ではない．そうすると，角運動量は保存量に対して非可換だから，超選択則によれば，角運動量は測定不可能なはずである．しかし実際，角運動量は測定可能であるように見える．Zeeman 効果や Stern-Gerlach の実験は原子の角運動量を測っているし，偏光・複屈折は光子のスピン角運動量を測っている．どうしてそのようなことが許されるのか？

その答えは，我々のマクロな世界は回転対称性が破れているという事実にある．水の分子は回転対称な形をしていないし，アンモニアの分子も生体を形作るアミノ酸やたんぱく質分子も回転不変な形ではない．回転対称性は分子のレベルや固体結晶のレベルで自発的に破れており，マクロ世界には  $SO(3)$  の作用で非自明な変換を受ける球対称でない系がふんだんにある．そのような系はゼロでない角運動量を持つことができる．従って，ミクロ系とマクロ系が相互作用して角運動量を交換することができる．そのため角運動量の保存則はミクロ系で閉じない．ゆえに角運動量に対しては超選択則は適用されず，ミクロ系の回転変換量にマクロ系の指針量を連動させることができる．実際，角運動量を測定する実験はすべてミクロ系に電場や磁場や複屈折媒体などの非等方的外場を印可して回転対称性を破ることによって実行されている．

同様の考察から，超伝導のような  $U(1)$  対称性が破れた状態（正確には，長距離秩序を有する状態）を作れば  $U(1)$  可変量（相対位相のような量）が測定できることも納得がいく．Josephson 接合がこのような状況に相当している．Josephson 接合の場合， $U(1)$  対称性が自発的に破れた系を 2 つ用意し，トンネル効果で接合させることによって  $U(1)$  保存量の孤立保存則を破っているのである．

## 7.12 批判に備えて

「この議論は《カラーの閉じ込め》を《カラーはマクロ量ではない》と言い換えただけのトートロジーではないか」という批判はあり得るが、それは的外れである。本発表は「測れる」という言葉の意味内容を「被測定量と指針量との群作用共変性」のことだと規定し、「ミクロ孤立系のカラー保存則が破れなければ、たとえマクロ世界にカラー可変量があっても、ミクロ側のカラー変換に対して共变的に連動しないので、指針量として機能しない」という力学的機構に踏み込んだ主張をしているのである。

しかも「すべての測定可能量は超選択チャージと可換でなければならない」ことを天下りの要請をしているのではなく、「測定過程が孤立保存則を許容する」ことだけを仮定すれば超選択則が導けることを示している。測定過程が孤立保存則を許容するかどうかは、力学の問題としてチェックが可能な条件である。

また、ある量を群作用について共变的に測るためには、その対称性を破ればよい（孤立保存則を破ればよい）という方針も与えている。

ただし、局所ゲージ対称性の場の相対論的量子論の定式化は単純ではなく（ghost, auxiliary fields, indefinite-metric space など）、ここでの議論をそのままカラー閉じ込めの証明とするわけにはいかないだろう。また、「カラーが測定されない」とこと、「クォークがハドロンの外に出て来ない」ことは、やはり一段異なる問題であり、束縛系・ダイナミクスの問題としての閉じ込めの問題は未解決のまま残る。

## 7.13 階層性をもたらすもの

自然界にはクォーク・ハドロン・原子核・原子・分子・高分子・ウイルス・細胞・生物などの階層構造があるが、何が階層性をもたらしているのか？

一つの答えとして、孤立保存則を挙げたい。孤立保存則があると、保存量と非可換なものはその系の外部からは見えなくなるというのが超選択則であった。また、孤立保存量の固有値は、系内部の運動では変化しない。つまり、孤立保存量はセクターを定義し、系固有の境界を定義する。また、孤立保存則は入れ子構造になり得る。カラーはハドロンの外には出て来ない、アイソスピンは原子核外には出て来ない保存量である。

それともう一つ、階層性をもたらすものとして対称性の自発的破れを挙げたい。P. W. Anderson の More is different [9] や小嶋泉氏の Micro-Macro duality [11] の議論が指し示しているように、対称性の自発的破れに伴って出現する order parameter はセクターを定める（このことは昔から多くの数理物理学者たちによってさまざまなアプローチで気づかれている [22]）。また、order parameter は群作用で変換を受けるので、それを力学変数とする系はゼロでない保存量を持つことができ、孤立保存則を乗り越えてミクロ対象系の外部からの測定や制御が可能になる。例えば、回転対称性は分子の階層で破れている。並進対称性は、おそらくさまざまなレベルで何度も破れているのだろう。並進対称性は、ハドロンの階層で自発的に破れているし、固体結晶の階層でも破れている。そうやって並進対称性が破れているからこそ「ものの位置」を測れるようになっている。もちろん全運動量保存則が成り立っているならば、全系の重心の位置は測れず、測れるものは相対位置に限られる。



言いたかったことは、「孤立保存則が、ある種の境界線・節目を作り、対称性の自発的破れがマクロ力学変数を創発することによって、新しいマクロ階層が出現するとともに、ミクロ階層を測定・制御する手段も提供され、自然界に入れ子状の階層構造が出現する」という描像が描けるということだ。

## 7.14 Wigner-Araki-Yanase-Ozawa の定理との関係

不確定性関係にはいろいろなバージョンがあるが、そのうちの一つ、保存量に対して非可換な量の測定精度の限界を与える不等式を述べる。これは Wigner-Araki-Yanase の定理を小澤氏が定量的関係式に仕上げたものである [18, 19, 20]。

対象系の物理量  $A$  を、測定器の指針量  $M$  で測ったときの平均誤差を

$$\varepsilon(A) := \sqrt{\langle (\alpha(M) - A)^2 \rangle}, \quad \alpha(M) := e^{iHt/\hbar} M e^{-iHt/\hbar} \quad (51)$$

とする。物理量  $J$  の標準偏差は

$$\sigma(J) := \sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}. \quad (52)$$

測定過程  $\alpha$  において  $J = J_1 + J_2$  は保存するとする： $\alpha(J) = J$  (または  $[H, J] = 0$ )。ここで  $J_1$  は対象系の量、 $J_2$  は測定器の量。また、 $[J_2, M] = 0$  とする。合成系の初期状態はテンソル積状態  $\nu = \omega \otimes \varrho$  とする。このとき

$$\varepsilon(A)^2 \geq \frac{|\langle [A, J_1] \rangle|^2}{4\{\sigma(J_1)^2 + \sigma(J_2)^2\}} \quad (53)$$

が成り立つ。

超選択則を考える状況では、そもそも  $J_1$  だけで保存則が成立しており ( $\alpha(J_1) = J_1$ )、初期状態も  $\sigma(J_1) = \sigma(J_2) = 0$  を満たすように選べる。従って、測定誤差  $\varepsilon(A)$  はどのような値でも取り得る。つまり、いくら  $M$  の目盛りを読み取っても  $A$  の値の推測の助けにならない。

私の議論は、「測る」ことを「被測定量と指針量の共変性を作ること」だと特徴付けて、測定過程という力学的プロセスの対称性が、被測定量と指針量の共变的相関を作ることの妨げる、従って群可変量が測れない、という超選択則の意味内容を明らかにしている。つまり、測定に対する要請事項として精度（誤差）よりも共変性の方に重点を置いた議論だと言える。

## 8 次元解析の延長上の超選択則

量の理論・数と量・参照系としての単位系・スケーリング・パリティ・ゲージ超選択則  
量子情報との関連（川久保君）

## 参考文献

- [1] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, “The intrinsic parity of elementary particles,” Phys. Rev. **88**, 101 (1952).

- [2] A. S. Wightman, “Superselection rules; old and new,” *IL Nuovo Cim.* **110B**, 751 (1995).
- [3] J. v. ノイマン (井上健他 共訳)「量子力学の数学的基礎」みすず書房 (1957). 自己共役作用素と測定可能量の関係は IV.2 節, p.250, 測定のモデルは VI.3 節, p.350 で論じられている .
- [4] G. C. Hegerfeldt, K. Kraus, and E. P. Wigner, “Proof of the fermion superselection rule without the assumption of time reversal invariance,” *J. Math. Phys.* **9**, 2029 (1968).
- [5] I. E. Segal, “Postulates for general quantum mechanics,” *Ann. Math.* **48**, 930 (1947).
- [6] I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 73 (1947).
- [7] O. E. Lanford and D. Ruelle, “Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics,” *Comm. Math. Phys.* **13**, 194 (1969).
- [8] K. Hepp, “Quantum theory of measurement and macroscopic observables,” *Helv. Phys. Acta* **45**, 237 (1972).
- [9] P. W. Anderson, “More is Different,” *Science* **177**, 393 (1972).
- [10] G. L. Sewell, *Quantum Mechanics and Its Emergent Macrophysics*, Princeton University (2002), Section 2.6.5.
- [11] I. Ojima, “Micro-Macro duality in quantum physics”, pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, World Scientific (2005); arXiv: math-ph/0502038.
- [12] G. W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Benjamin (1968). Y. Ohnuki and S. Kitakado, “Fundamental algebra for quantum mechanics on  $S^D$  and gauge potentials,” *J. Math. Phys.* **34**, 2827 (1993). D. McMullan and I. Tsutsui, “On the emergence of gauge structures and generalized spin when quantizing on a coset space,” *Ann. Phys.* **237**, 269 (1995). S. Tanimura and I. Tsutsui, “Induced gauge fields in the path-integral,” *Mod. Phys. Lett. A***10**, 2607 (1995).
- [13] 超選択則と混合状態に関する誤解を正す議論を小嶋泉氏が展開している：大矢雅則, 小嶋泉 編著「量子情報と進化の力学」牧野書店 (1996) 第 I 部第 2 章 . 小嶋泉『量子論の基礎概念：その物理的解釈と超選択則』数理科学 2002 年 7 月号 p.36. 小嶋泉『量子古典対応と凝縮状態』in「数理物理への誘い 7」河東泰之編, 遊星社 (2010) pp.11-52.
- [14] 超選択則を誤解している本や論文の例：湯川秀樹, 豊田利幸 編著「量子力学 I」岩波書店 (1978) 4.6 節 . 同「量子力学 II」16.1 節の記述も微妙 . Y. Aharonov and L. Susskind, “Charge superselection rule,” *Phys. Rev.* **155**, 1428 (1967). C. Cisneros, R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Limitations on the superposition principle: superselection rules in non-relativistic quantum mechanics,” *Eur. J. Phys.* **19**, 237 (1998).

- [15] M. Ozawa, “Quantum perfect correlations,” *Ann. Phys.* **321**, 744 (2006). 小澤正直「非可換観測量の同時測定可能性」数理解析研究所講究録（ネット閲覧可）**1565**, 133 (2007).
- [16] H. ジョージアイ（九後汰一郎 訳）「物理学におけるリー代数」吉岡書店（1990）, p.xv の紹介文と p.121 の本文. 2010 年に訳出された第 2 版ではこの趣旨の記述はなくなっている .
- [17] R. P. Feynman, Nobel Lecture, [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1965/feynman-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1965/feynman-lecture.html). 本論文に関係する部分を引用しておく：《I didn’t have the knowledge to understand the way these were defined in the conventional papers because they were expressed at that time in terms of creation and annihilation operators, and so on, which, I had not successfully learned. I remember that when someone had started to teach me about creation and annihilation operators, that this operator creates an electron, I said, “how do you create an electron? It disagrees with the conservation of charge”, and in that way, I blocked my mind from learning a very practical scheme of calculation. 》翻訳が「物理法則はいかにして発見されたか」（江沢洋 訳）に収められている .
- [18] E. P. Wigner, “Die Messung quantenmechanischer Operatoren,” *Z. Phys.* **133**, 101 (1952).
- [19] H. Araki and M. M. Yanase, “Measurement of quantum mechanical operators,” *Phys. Rev.* **120**, 622 (1960).
- [20] M. Ozawa, “Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 050402 (2002).
- [21] 雑誌『理系への数学』（現代数学社）の連載記事「21 世紀の量子論入門」でも超選択則について論じた：「第 17 回：計量と次元解析と超選択則」2011 年 9 月号 pp.41-47. 「第 18 回：有向量とパリティと超選択則」2011 年 10 月号 pp.42-48. 「第 19 回：ゲージ超選択則の力学的由来」2011 年 11 月号 pp.47-53.
- [22] 谷村省吾「量子古典対応：量子化の技法，古典系創発の機構」数理解析 2012 年 4 月号 .
- [23] 測定理論から見た超選択則：S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011). 谷村省吾「量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め」数理解析研究所講究録 1774 号 pp.100-117 (2012), 谷村の web page にも掲載 .
- [24] 量子情報がらみで超選択則を論じた研究：S. D. Bartlett and H. M. Wiseman, “Entanglement Constrained by Superselection Rules,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 097903 (2003).