

- ナイーブな方法は、 \mathcal{H} をフォック空間 (Fock space) と呼ばれる (くりこまれた^{*13)}) 自由粒子の集まりのヒルベルト空間に採る方法である。いつもそれで正しいヒルベルト空間が張れる保証はないのだが、便利なのでよく使われる。
- わりと実用的な方法は、最初は有限自由度にしておいて第3章の枠組みで計算し、最後に無限自由度極限をとる方法である。ただし、有限自由度系のどの状態が無限自由度系の正しい状態に極限移行するかどうか等、注意を払うべき点もある。
- どんなヒルベルト空間をとっているかを明示しないですむ場合もある。そういう場合には、 \mathcal{H} をどう採ったかを気にせずに計算する事が多い。
- 一般的で厳密な方法に、GNS 構成法 (Gelfand-Naimark-Segal construction) と呼ばれる方法がある。この方法では、まず、物理量の全体が与えられているとする。そして、自分が扱いたい状態のうちの一つ ψ_0 を選ぶ^{*14)}。それをもとにして、 ψ_0 を表す状態ベクトル $|\psi_0\rangle$ と、それを含む \mathcal{H} と、物理量たちを表す \mathcal{H} の上の演算子の表現とを、系統的に作る方法である。
- 以上のやり方と一部重なるやり方だが、計算の途中では \mathcal{H} に未定の部分を持たせておいて、計算の最後に、全体のつじつまが合うように \mathcal{H} を決定する。これも便利で有効な方法であり、しばしば採用される。

このように、第3章の理論構成のうち、ヒルベルト空間の選び方が、場の量子論では変更される。しかし、5つの要請は基本的にそのまま受け継がれる。

なお、相対論的場の量子論の場合には、実際には種々の困難があり、有限自由度系ほど確固とした理論ができているわけではない。例えば、物理量の期待値などを計算しようとする、いたるところに発散が生じるという困難がある。これは、くりこみ (renormalization) と呼ばれる処方箋でとりあえずは解決されているが、それは応急処置である。それでも、その応急処置を行うと、驚異的な精度で実験と一致し (まだ未知の) 正しい理論のエッセンスをなんらかの意味で引き出した理論にはなっていると考えられている。

7.4 ♠♠ 始めに何がありき？

第3章の5つの要請は場の量子論においてもそのまま受け継がれる、と前節で述べた。量子論の形式は、本書で説明した演算子形式以外にもいろいろあるが、いずれも演算子形式と等価だ (と信じられている) から、この5つの要請

*13) 質量などの、粒子を特徴づけるパラメータは、粒子間相互作用があると、相互作用がない場合とは違った値に観測される。これを、質量などのくりこみ (renormalization) と言う。フォック表現では、繰り込まれたパラメータを持つ自由粒子でヒルベルト空間を張る。

*14) 普通は基底状態を選ぶが、必ずしもそうでなくてもよい。

こそ量子論の支柱である。

5つの要請のうち、最初の2つは、(1) 物理状態はあるヒルベルト空間 \mathcal{H} の射線で表され、(2) 可観測量はその \mathcal{H} の上の自己共役演算子で表される、ということであった。これはこれで良いのだが、次のような疑問もわくだろう：具体的に物理系が与えられたときに、(i) どんなヒルベルト空間をとるべきか？ (ii) その中のどんな射線を物理状態として許すか（どんな射線は許さないか）？ (iii) どんな量が可観測量になるか？

残念ながら、これらのことを決定する一般的な原理は見つかっていない。そこで、各人が分析したい内容に応じて、次のような様々な立場を使い分けしているのが現状である。

- (a) まず始めに適切なヒルベルト空間 \mathcal{H} を設定し、 \mathcal{H} の中の全ての射線を物理状態として許し、 \mathcal{H} の上の全ての自己共役演算子が可観測量になるとする立場。いわば「始めにヒルベルト空間ありき」という立場である。例えば、量子情報理論ではこの立場をとる人が多いようである。
- (b) まず始めに全ての可観測量と、それを表す演算子の相互の間の関係（交換関係のようにヒルベルト空間の選択に依らない形で）を設定する。これをうまく表現できるようなヒルベルト空間を構成する立場。いわば「始めに可観測量ありき」という立場である。有限自由度系であれば（フォン・ノイマンの一意性定理などにより、普通は）これで量子論の計算結果が一意的に定まる、というのが3.22節であった。一方、自由度が無限大の場合は、一意性定理が成り立たないので、自分の扱いたい状態たちのひとつを選び、それを含むようにヒルベルト空間を構成する。これが前節で述べたGNS構成法である。
- (c) まず始めに古典論が与えられているとして、正準量子化で量子論を構成する立場。いわば「始めに古典論ありき」という立場である。4.5節で述べたような曖昧さがあるものの、その曖昧な部分をひとたび決定した後は、物理量が全て決まるので、後は立場 (b) で良い。
- (d) 立場 (c) で、基本変数として、フェルミオンの場のように、古典論には対応物がなかった^{*15)} 変数をとって正準量子化した場合は、何が可観測量であるかを改めて考える必要がある。そこで、付加的な要請を課して可観測量を定めようとする立場。たとえば「場とその有限階の微分より成る多項式の、有限時空領域にわたる積分で、ゲージ不変で局所的なもの」などとする。いわば「始めに場（基本変数）ありき」という立場である。場の理論の教科書では、このような立場をとる場合が多いようである。
- (e) 基本変数（たとえば、場）から出発する点では立場 (d) と同じだが、可観

*15) 実は、フェルミオンの場の古典論も作ることはできるのだが、それによって何が可観測量であるかを決定できるわけではないから、同じ事である。

測定を決めるのには、きちんと量子測定理論を使わねばならないとする立場。いわば、「始めに基本変数があるのだが、何が可観測量になるか、どれくらいの精度で計れるのか等を、全て量子論自体が決定する」という立場である。筆者は個人的には、この立場が（実用性は別として）本筋に近いだろうと考えている。

もちろん、これら以外にも様々な立場があり得る。しかし、もしかすると、この問題は量子論がもっと進化しないと解決できない問題なのかもしれない。