

超選択則とreference frame

川久保 亮

元ネタ

Bartlett, Rudolph, Spekkens
*“Reference frames, superselection rules,
and quantum information”*
Rev. Mod. Phys. **79**, 555 (2007).

Kitaev, Mayers, Preskill
“Superselection rules and quantum protocols”
Phys. Rev. A **69**, 052326 (2004).

超選択則とreference frame

- 量子論と超選択則の復習
- 位相のreference frameと光子数超選択則
- 超選択則がある描像とない描像を行き来する

量子論と超選択則の復習

量子状態の重ね合わせ

- 量子状態の重ね合わせ（純粋状態）

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$$

- 射影測定で得られる測定値の確率分布

$$P(\lambda) = \left\| \hat{\mathcal{P}}(\lambda) |\psi\rangle \right\|^2, \quad \sum_{\lambda} \hat{\mathcal{P}}(\lambda) = \hat{I}$$

射影演算子

測定値

- 例 ($\langle a|b\rangle = 0$)

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle + |b\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle - |b\rangle)$$

- $|+\rangle$ を $\{|a\rangle\langle a|, |b\rangle\langle b|\}$ で測定すると、測定結果はランダム

$$P(a) = 1/2, \quad P(b) = 1/2$$

- $|+\rangle$ を $\{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$ で測定すると、測定結果は一定

$$P(+)=1, \quad P(-)=0$$

密度演算子とPOVM

- 状態ベクトル $|\psi\rangle$ から、演算子 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ を作ってみる

$$P_{|\psi\rangle}(\lambda) = \langle\psi|\hat{\mathcal{P}}(\lambda)|\psi\rangle = \text{Tr } \hat{\rho}\hat{\mathcal{P}}(\lambda)$$

- 一般の密度演算子 $\hat{\rho}$ は、純粋状態の古典確率混合（混合状態）

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad P_{\hat{\rho}}(\lambda) = \text{Tr } \hat{\rho}\hat{\mathcal{P}}(\lambda) = \sum_i p_i P_{|\psi_i\rangle}(\lambda)$$

- 例 混合状態 $\hat{\rho} = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) / 2 = (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) / 2$

- $\{|a\rangle\langle a|, |b\rangle\langle b|\}$ で測定すると、 $P(a) = 1/2, \quad P(b) = 1/2$

- $\{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$ で測定しても、 $P(+) = 1/2, \quad P(-) = 1/2$

- 測定の一般化 ... POVM: Positive Operator Valued Measure POVM

$$P(\lambda) = \text{Tr } \hat{\rho}\hat{E}(\lambda), \quad \sum_{\lambda} \hat{E}(\lambda) = \hat{I}, \quad \hat{E}(\lambda) \geq 0$$


ユニタリー変換と量子操作

- 孤立量子系の時間発展はユニタリー変換で表される (シュレディンガー描像)

$$|\psi\rangle \mapsto \hat{U}|\psi\rangle$$

- 密度演算子に対するユニタリー変換

$$\hat{\rho} \mapsto \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger$$

- 測定の反作用や開放系の時間発展はユニタリー変換とは限らない
- 一般の量子操作 ... CP map (Completely positive map)

$$\hat{\rho} \mapsto \mathcal{E}[\hat{\rho}]$$

- Klaus 表現

$$\mathcal{E}[\hat{\rho}] = \sum_k \hat{V}_k \hat{\rho} \hat{V}_k^\dagger, \quad \sum_k \hat{V}_k^\dagger \hat{V}_k \leq \hat{I}$$

- $\{\hat{V}_k\} = \{\hat{U}\}$... ユニタリー変換

超選択則

- $\langle a | \hat{E}(\lambda) | b \rangle = 0$ を満たすようなPOVMしか測定できないと仮定

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \quad \hat{\rho} = |\alpha|^2|a\rangle\langle a| + |\beta|^2|b\rangle\langle b|$$

量子的重ね合わせ

古典的確率混合

$$P_{|\psi\rangle}(\lambda) = |\alpha|^2 \langle a | \hat{E}(\lambda) | a \rangle + |\beta|^2 \langle b | \hat{E}(\lambda) | b \rangle = P_{\hat{\rho}}(\lambda)$$

- 量子的重ね合わせと古典的確率混合が区別できない
- (量子的干渉効果が現れない)
- しばしば、「 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ の重ね合わせが禁止される」と表現される
 - 「電荷の異なる状態の重ね合わせは禁止される」
 - 「バリオン数の異なる状態の重ね合わせは禁止される」

光の量子状態

- 単一モードの光 ... 調和振動子

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

- エネルギー固有状態 ... 光子数状態 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle,$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

- コヒーレント状態 (α : 複素数)

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2, \quad \Delta n = |\alpha|$$

- α の偏角が光の位相に対応

- 光子数と位相の「不確定性関係」

$$\Delta n \Delta \phi \sim 1/2 \Rightarrow \Delta \phi \sim 1/2|\alpha|^{-1}$$

U(1)変換と光子数の重ね合わせ

- 位相回転演算子 (U(1)変換)

$$\hat{U}(\phi) = e^{i\hat{n}\phi}, \quad \hat{U}(\phi)|n\rangle = e^{in\phi}|n\rangle$$

- 光子数の重ね合わせがない状態は位相回転で不変 (U(1)不変)

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle\langle n|, \quad \hat{U}(\phi)\hat{\rho}\hat{U}^\dagger(\phi) = \hat{\rho}$$

- 光子数の重ね合わせがある状態は位相回転で不変でない

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \hat{U}(\phi)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{U}^\dagger(\phi) = |\alpha e^{i\phi}\rangle\langle\alpha e^{i\phi}|$$

- 任意に回転した状態全てを混合すると、U(1)不変なので重ね合わせがない

$$\hat{\rho} = \int \frac{d\phi}{2\pi} \hat{U}(\phi)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{U}^\dagger(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |n\rangle\langle n|$$

U(1)超選択則

- U(1)不変なPOVMしか測定できない $\Rightarrow$ 粒子数超選択則

$$\hat{U}^\dagger(\phi)\hat{E}(\lambda)\hat{U}(\phi) = \hat{E}(\lambda)$$

$$\Updownarrow$$

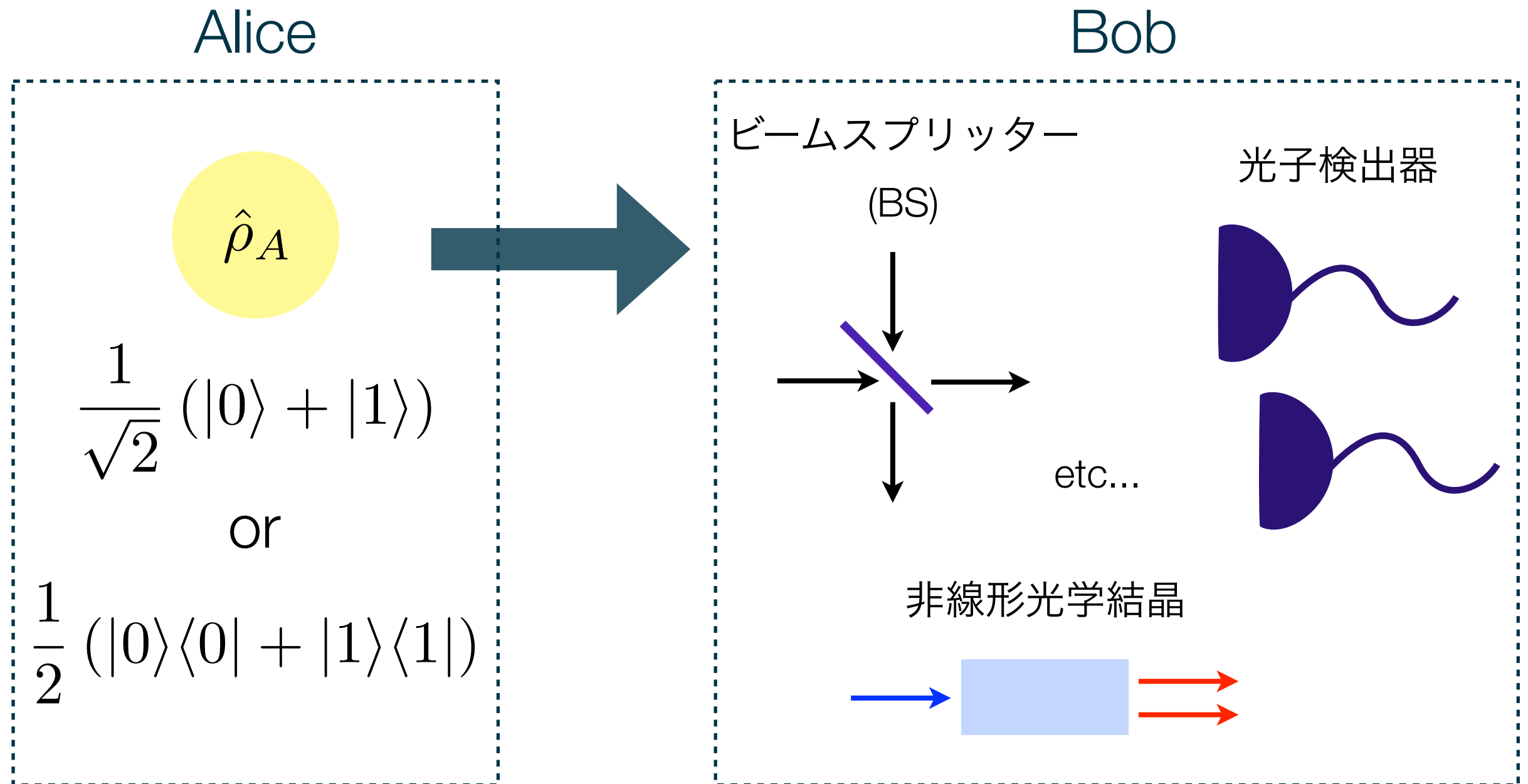
$$\langle m|\hat{E}(\lambda)|n\rangle = e^{-i(m-n)\phi}\langle m|\hat{E}(\lambda)|n\rangle = \delta_{mn}$$

(Conventionalな) $U(1)$ 超選択則

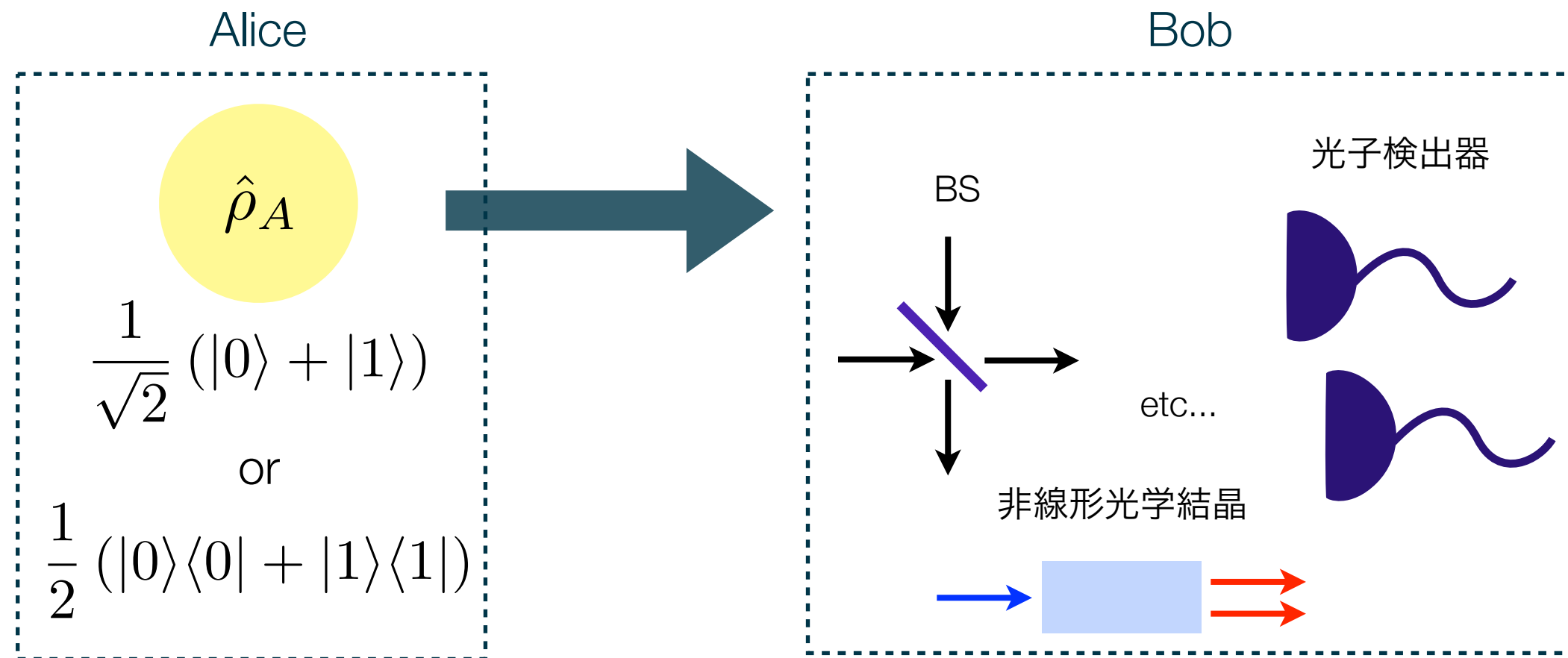
- $U(1)$ ゲージ変換
 - 荷電粒子の内部自由度に対する $U(1)$ 変換
 - 量子力学的粒子の波動関数の位相に対する $U(1)$ 変換
- ゲージ変換で物理は変わらないはず→ゲージ不変な物理量しか測定できない
 - $U(1)$ 超選択則・保存則
 - 電荷超選択則・保存則
 - 粒子数超選択則・保存則
- 量子電磁力学のラグランジアンは電磁場の位相の $U(1)$ 変換に対して不変でない
 - 光子数は保存しない。光子数超選択則もない...?

位相のreference frameと光子数超選択則

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



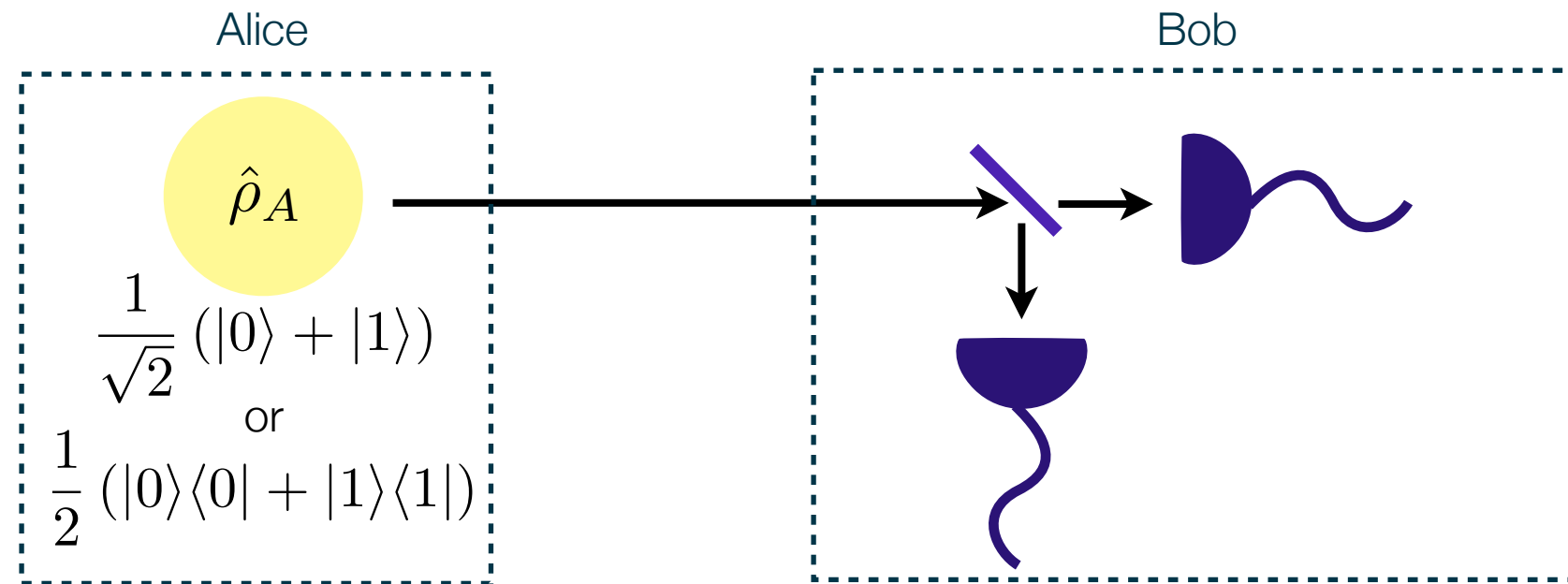
Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



- Bobは補助系を使ってもよいが、補助系の初期状態には異なるエネルギー固有状態の重ね合わせがないことを仮定する
- エネルギーを保存する時間発展のみ（回転波近似）
- 行える測定は、エネルギー固有状態への射影のみ（光子検出器など）

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？

- 例えば...



- 重ね合わせ状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle|1\rangle \right)$$

Red arrows point from the text "合計光子数 = 0" to the $|0\rangle$ terms in the equation. A blue arrow points from the text "合計光子数 = 1" to the $|1\rangle|0\rangle$ and $|0\rangle|1\rangle$ terms.

$$P(0, 0) = 1/2, P(1, 0) = P(0, 1) = 1/4$$

- 混合状態

$$P(0, 0) = 1/2, P(1, 0) = P(0, 1) = 1/4$$

→検出できない

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？

- Bobは補助系を使ってもよいが、補助系の初期状態には異なるエネルギー固有状態の重ね合わせがないことを仮定する

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B, \quad \hat{U}_B(\phi) \hat{\rho}_B \hat{U}_B^\dagger(\phi) = \hat{\rho}_B$$

- エネルギーを保存する時間発展のみ（回転波近似）

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{\text{int}}, \quad [\hat{H}_A + \hat{H}_B, \hat{H}_{\text{int}}] = 0$$

- 行える測定は、エネルギー固有状態への射影のみ（光子検出器など）

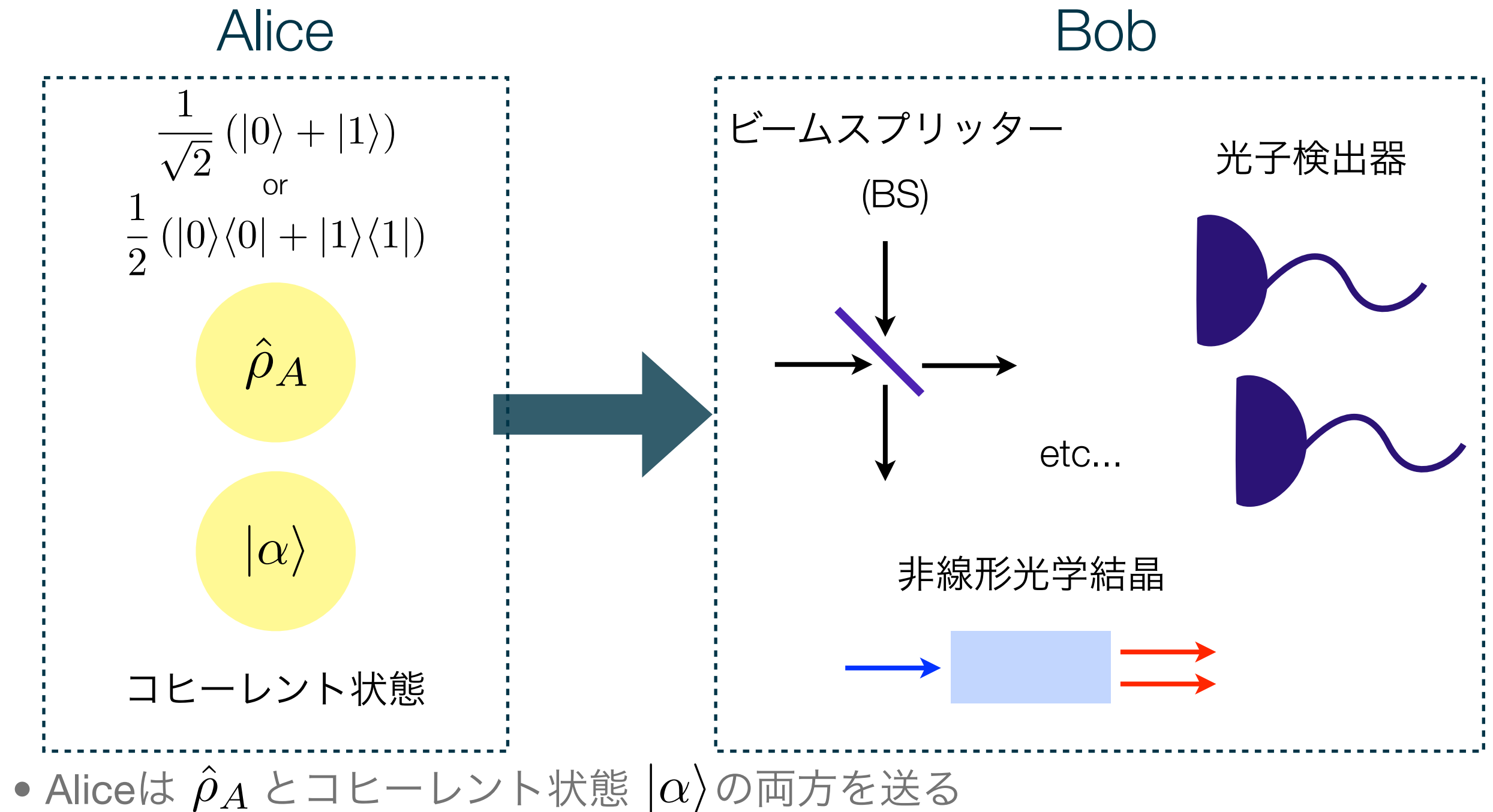
$$[\hat{\mathcal{P}}(\lambda), \hat{H}_A] = [\hat{\mathcal{P}}(\lambda), \hat{H}_B] = 0$$

$$\begin{aligned} P_{\hat{\rho}_A}(\lambda) &= \text{Tr} \left[e^{i\hat{H}t} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}t} \hat{\mathcal{P}}(\lambda) \right] = \text{Tr} \left[e^{i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{\rho}_{AB} e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{\mathcal{P}}(\lambda) \right] \\ P_{\hat{U}_A(\phi) \hat{\rho}_A \hat{U}_A^\dagger(\phi)}(\lambda) &= \text{Tr} \left[e^{i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{U}_A(\phi) \hat{\rho}_A \hat{U}_A^\dagger(\phi) \otimes \hat{\rho}_B e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{\mathcal{P}}(\lambda) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{\rho}_A \otimes \hat{U}_B(\phi) \hat{\rho}_B \hat{U}_B^\dagger(\phi) e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t} \hat{\mathcal{P}}(\lambda) \right] \\ &= P_{\hat{\rho}_A}(\lambda) \end{aligned}$$

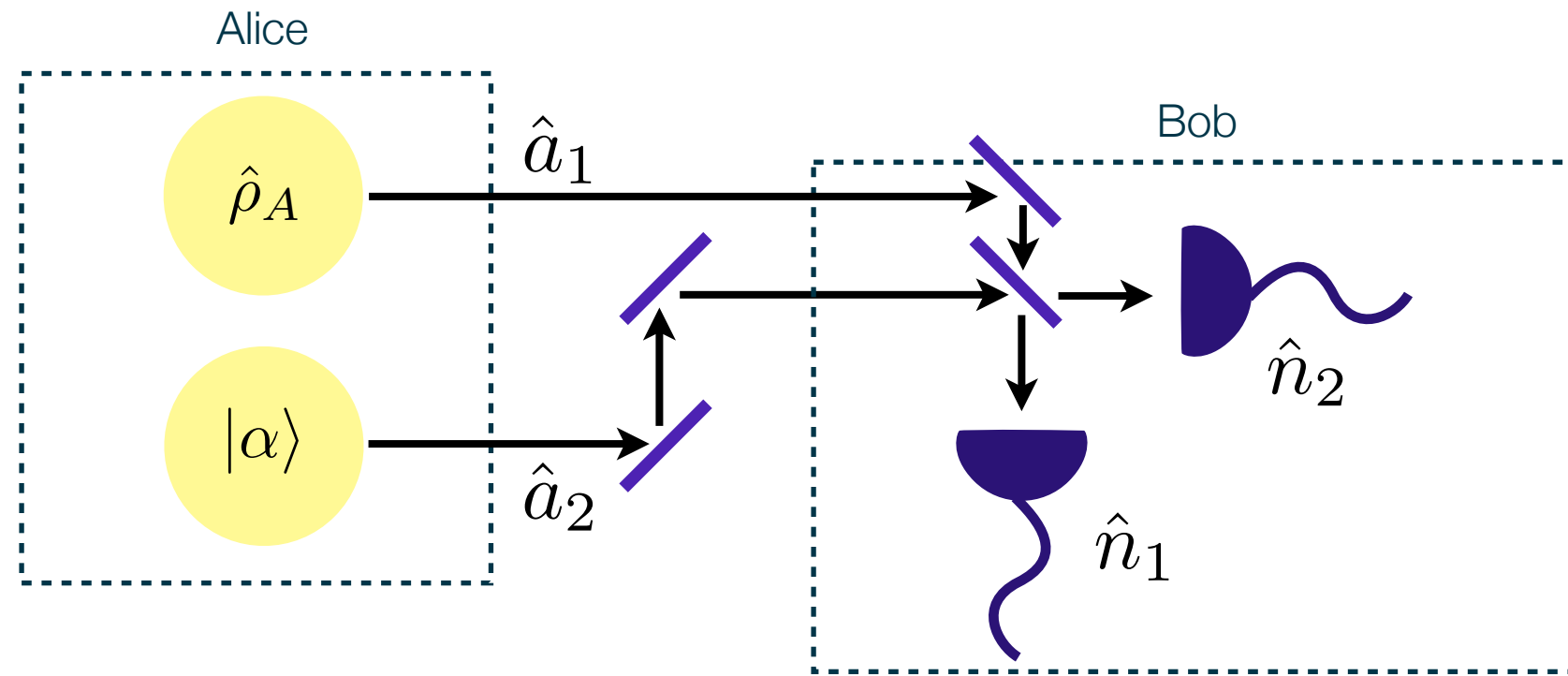
→検出できない！

光子数
超選択則

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



- 重ね合わせ状態

$$\hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1$$

$$\langle \hat{n}_2 - \hat{n}_1 \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$$

- 混合状態

$$\langle \hat{n}_2 - \hat{n}_1 \rangle = 0$$

→検出できる

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？

- Aliceが $\hat{\rho}_A$ のみBobに渡す場合、Bobは重ね合わせを検出できない
 - Bobの測定結果は、Bobの持っている状態 $\hat{\rho}_A$ のグローバルな位相に依存しない ... (effectiveな) 光子数超選択則
- Aliceが $\hat{\rho}_A$ と一緒にコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を渡すと、検出できる
 - Bobの測定結果は、Bobの持っている状態 $\hat{\rho}_A \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|$ のグローバルな位相にはやはり依存しない
 - しかし、 $\hat{\rho}_A$ と $|\alpha\rangle$ の相対位相には依存することがある
 - $\hat{\rho}_A$ の位相を、 $|\alpha\rangle$ の位相を基準として測っている ... reference frame

位相のreference frameとなるような系を持っている場合、
重ね合わせと混合状態が区別できる

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？

- BobがAliceからもらう状態

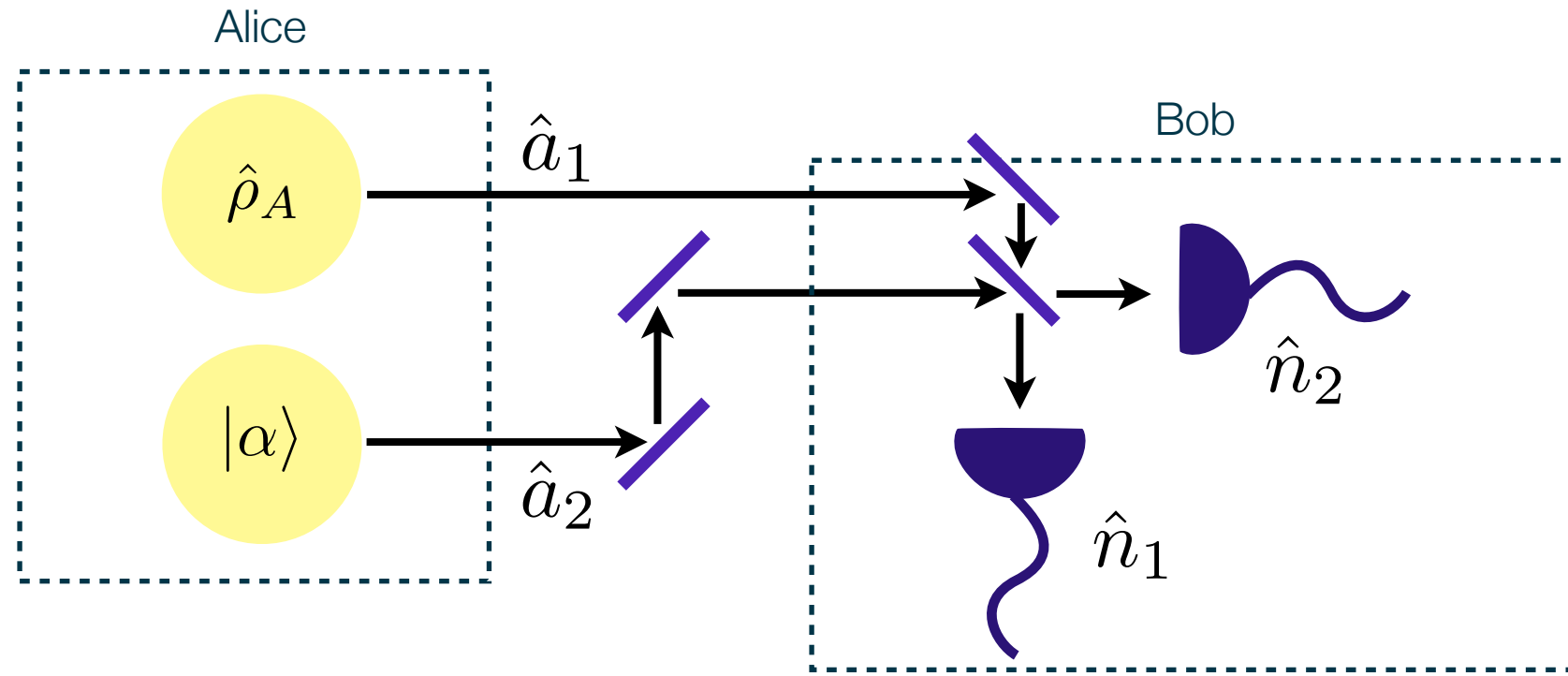
$$\hat{\rho}_A \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad \dots \text{U(1)不変でない}$$

- Bobは $\hat{\rho}_A$ と $|\alpha\rangle$ の相対位相を測っているので、全体の位相を混合してもよい

$$\int \frac{d\phi}{2\pi} \hat{U}_A(\phi) \hat{\rho}_A \hat{U}_A^\dagger(\phi) \otimes |\alpha e^{i\phi}\rangle\langle\alpha e^{i\phi}| \quad \dots \text{U(1)不変}$$

- U(1)不変でない状態に、U(1)不変でないreference frameを付け加えた上で全体の位相を混合することで、U(1)不変な描像に帰着できる

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



$$\hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1$$

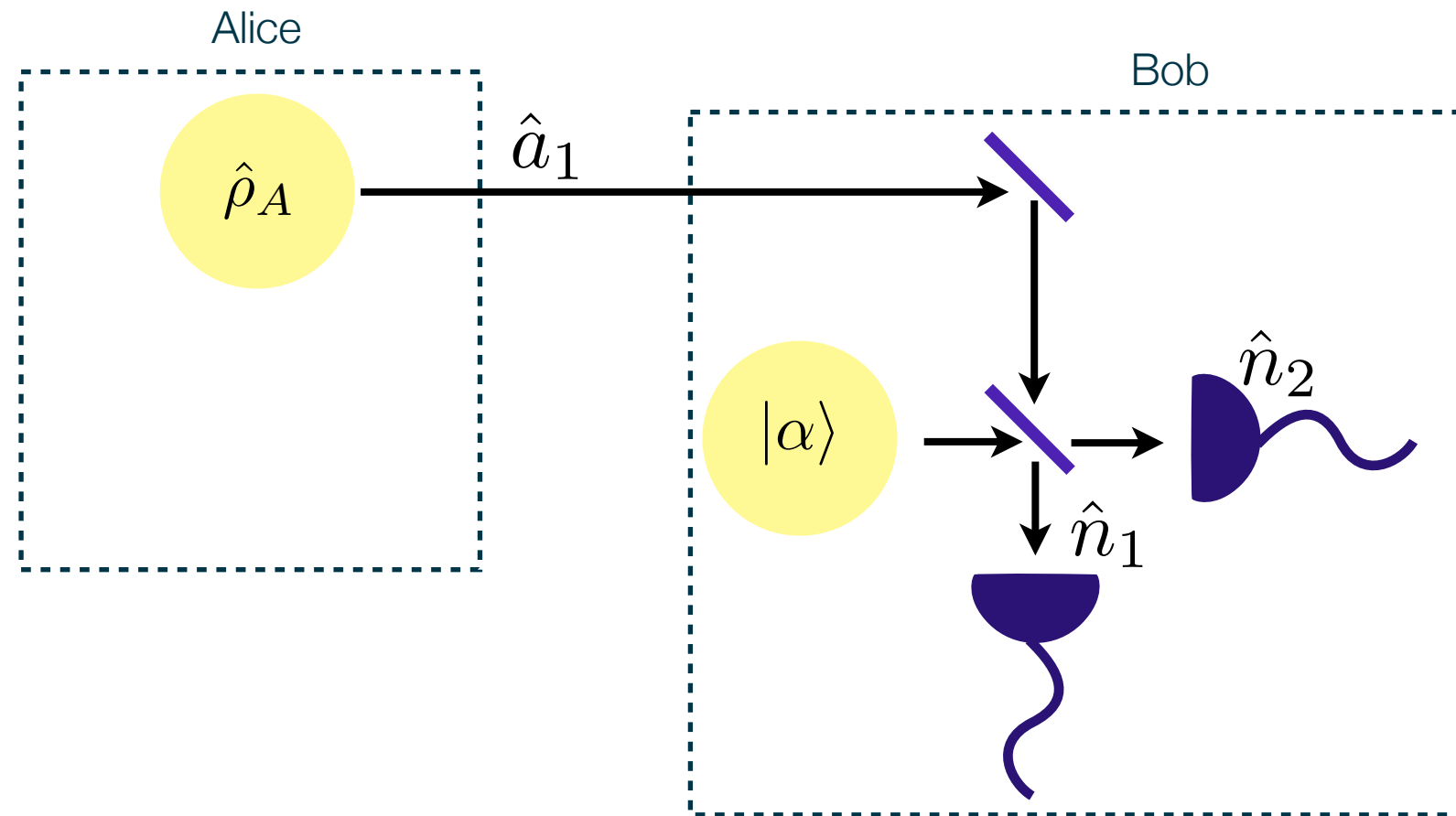
$$\langle \hat{n}_2 - \hat{n}_1 \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$$

$$\langle \hat{n}_2 - \hat{n}_1 \rangle = 0$$

→検出できる

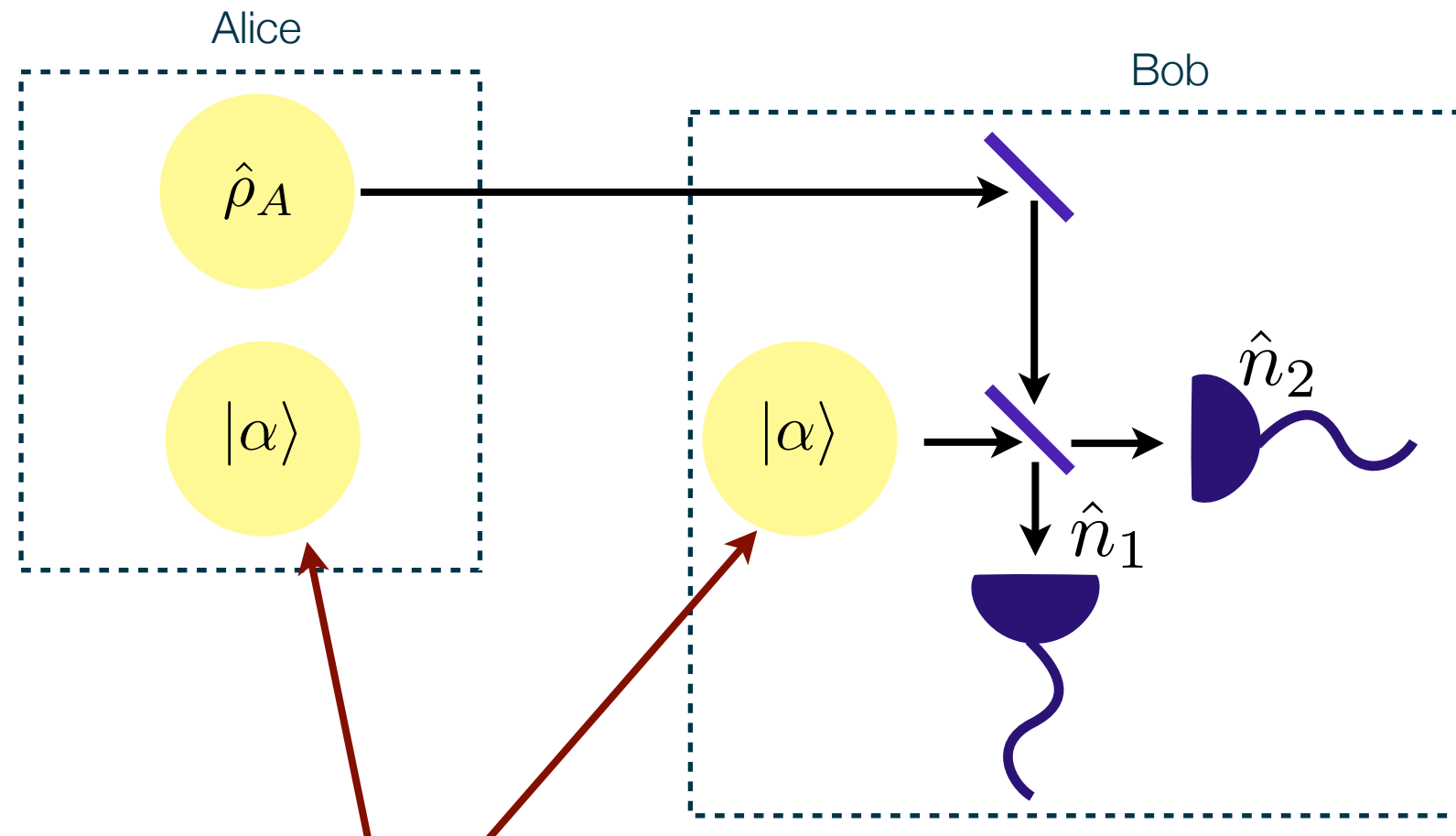
- 重ね合わせ状態
- 混合状態

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



Bobがreferenceを用意できる？

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？

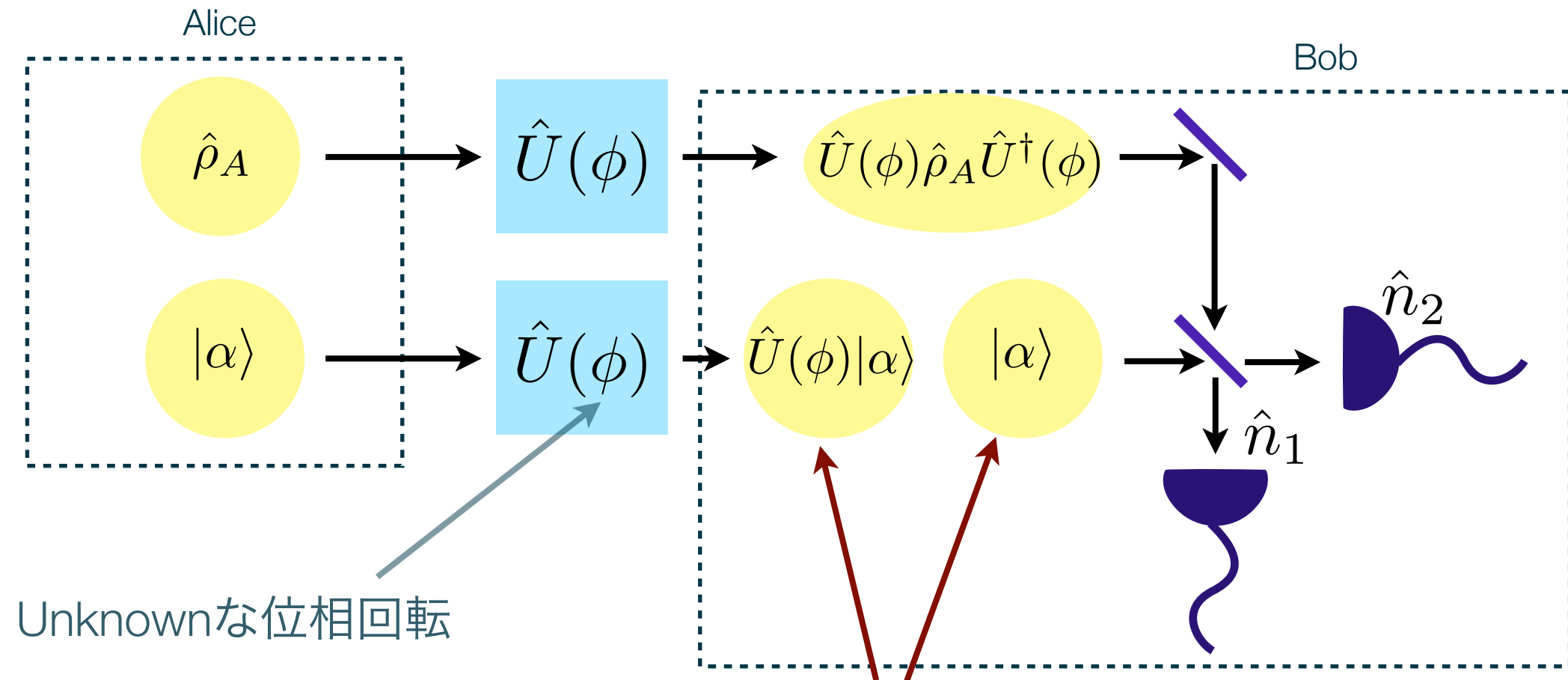


BobはAliceが持っているのと同じ
referenceを用意できる？

- BobはAliceのreferenceの位相を知らなければならない
- 位相の情報は、物理系そのものを渡さなければ伝えられない

“Unspeakable” quantum information

Bobは光子数の重ね合わせを検出できる？



- Bobが用意したreference ... $|\alpha\rangle$
- AliceからBobに渡される状態 ... Unknownな位相回転がかかる

$$\int \frac{d\phi}{2\pi} \hat{U}(\phi) \hat{\rho}_A \hat{U}^\dagger(\phi) \quad \dots \text{U(1)不変}$$

Referenceを共有しないことによる (Bobにとっての) 超選択則

位相のreference frameと光子数超選択則

- 量子光学では通常エネルギー保存が成り立っており、
それゆえ光子数超選択則がeffectiveに成り立つ
- 位相の基準となるような系（reference frame）を持つことで、
光子数超選択則を無効にできる
- 逆に、AliceがBobに位相の基準を渡さないことで、
Bobに光子数超選択則が科せられる

超選択則がある描像とない描像を行き来する

RFの量子化（超選択則なし→超選択則あり）

- 異なる粒子数の重ね合わせ状態がある系の状態 $\hat{\rho}_S$

- Reference frameのための系を付け加える

$$|\phi + \phi'\rangle_R = \hat{U}_R(\phi')|\phi\rangle_R, \quad {}_R\langle\phi|\phi'\rangle_R = \delta(\phi - \phi')$$

- U(1)不変な状態

$$\hat{\rho}_S \mapsto \hat{\rho}^{\text{inv}} = \frac{1}{d_R} \int \frac{d\phi}{2\pi} |\phi\rangle_R \langle\phi| \otimes \hat{U}_S(\phi) \hat{\rho}_S \hat{U}_S^\dagger(\phi)$$

- U(1)不変なPOVM

$$\hat{E}_S(\lambda) \mapsto \hat{E}^{\text{inv}}(\lambda) = \int \frac{d\phi}{2\pi} |\phi\rangle_R \langle\phi| \otimes \hat{U}_S(\phi) \hat{E}_S(\lambda) \hat{U}_S^\dagger(\phi)$$

- U(1)不変なKlaus operator

$$\hat{V}_{Sk} \mapsto \hat{V}_k^{\text{inv}} = \int \frac{d\phi}{2\pi} |\phi\rangle_R \langle\phi| \otimes \hat{U}_S(\phi) \hat{V}_{Sk} \hat{U}_S^\dagger(\phi)$$

- 物理は変わらない

$$P(\lambda) = \text{Tr}_S \left[\sum_k \hat{V}_{Sk} \hat{\rho}_S \hat{V}_{Sk}^\dagger \hat{E}_S(\lambda) \right] = \text{Tr}_{RS} \left[\sum_k \hat{V}_k^{\text{inv}} \hat{\rho}^{\text{inv}} \hat{V}_k^{\text{inv}\dagger} \hat{E}^{\text{inv}}(\lambda) \right]$$

RFの量子化（超選択則なし→超選択則あり）

- Reference frameのための状態をどう選ぶか？

$$|\phi + \phi'\rangle_R = \hat{U}_R(\phi')|\phi\rangle_R, \quad \underline{{}_R\langle\phi|\phi'\rangle_R = \delta(\phi - \phi')}$$

- 粒子数に上限がない場合 ... Phase state

$$|\phi\rangle_R = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle_R \quad \dots \text{規格化不可能}$$

- コヒーレント状態 $|\phi\rangle_R = |\alpha e^{i\phi}\rangle_R$

$$|{}_R\langle\phi|\phi'\rangle_R|^2 = \exp[-|\alpha|^2(1 - \cos(\phi - \phi'))] \rightarrow 0 \quad (|\alpha| \rightarrow \infty)$$

- $\hat{\rho}_S$ が純粋状態 $|\psi\rangle_S$ で、粒子数が最大 $n_{\max}$ の場合

$$|\phi\rangle_R = \sum_{n=0}^N e^{in\phi} |n\rangle_R \quad (\underline{N \geq n_{\max}}) \quad \begin{array}{l} \text{RFの励起が} \\ \text{系の励起より多い} \end{array}$$

$$|\psi\rangle_S \mapsto |\psi\rangle^{\text{inv}} = \int \frac{d\phi}{2\pi} |\phi\rangle_R \otimes \hat{U}_S(\phi) |\psi\rangle_S$$

RFの脱量子化（超選択則あり→超選択則なし）

- 全系が粒子数 N の純粋状態である場合を考える ... $U(1)$ 不変
- 部分系 S を考え、残りを R とする

$$|\psi\rangle^{\text{inv}} = \sum_{n=0}^N c_n |N-n\rangle_R |n\rangle_S \mapsto |\psi\rangle_{\text{rel}} = \sum_{n=0}^N c_n |n\rangle_{\text{rel}}$$
$$\hat{a}_R \hat{a}_S^\dagger \mapsto \hat{a}_{\text{rel}}^\dagger (N - \hat{n}_{\text{rel}})^{1/2}$$

まとめ

- 量子論と超選択則の復習
 - ある変換に対して不変な量しか測定できない時、超選択則があらわれる
- 位相のreference frameと光子数超選択則
 - 変換の基準となるreference frameがない時、超選択則があらわれる
 - 逆に、reference frameがあれば、超選択則を破れる
- 超選択則がある描像とない描像を行き来する
 - Reference frameの役割を果たす大きな系があれば、どちらの記述もできる

Bartlett, Rudolph, Spekkens

“Reference frames, superselection rules, and quantum information”

Rev. Mod. Phys. **79**, 555 (2007).

Kitaev, Mayers, Preskill

“Superselection rules and quantum protocols”

Phys. Rev. A **69**, 052326 (2004).