2012年3月14日「超選択則討論会」東京大学駒場キャンパスにて

超選択則:
測定理論からの導出

Superselection Rules
from Measurement Theory

谷村 省吾

名古屋大学情報科学研究科

Reference: arXiv 1112.5701

講演概要

- 超選択則とは？　歴史と例
- 測定過程と対称性から超選択則を演繹する
- 角運動量のパラドクス
- 超選択則を乗り越える方法
- 不確定性関係との関係
- 階層構造と超選択則

通常の量子力学

- 物理系の状態はHilbert空間$\mathcal{H}$の単位ベクトルψ（または1次元部分空間）または密度行列ρで表される.
- 物理量は$\mathcal{H}$上の自己共役作用素$A\left(A^\dagger = A\right)$で表される.
- スペクトル分解$A = \sum_i a_i P_i$に対し，状態ψにおいて，Aの理想的測定によって測定値a_iを得る確率は$\mathrm{prob}(a_i) = \langle \psi, P_i \psi \rangle = \mathrm{Tr}(P_i \rho)$.
- 状態の時間変化を記述する1パラメータユニタリ変換群の作用がある.

超選択則とは？

- J : 超選択チャージ (superselection charge)
- A : 自己共役作用素 (self-adjoint operator)
  $A^\dagger = A$

Aは測定可能 $\Rightarrow$ $[A, J] = 0$

$[A, J] \neq 0$ $\Rightarrow$ A は測定不可能

超選択則は，作用素Aで表される物理量が測定可能であるための必要条件である.

保存則 vs. 超選択則

1. 物理量 J の保存則：ハミルトニアン H に対して
$$[J, H] = 0$$
2. 超選択則：任意の測定可能量 A に対して
$$[J, A] = 0$$

- J に対する条件式と見ると，超選択則は保存則の極端に強いケースと見なせる.
- しかし，本講演の目的は1から2を導くこと.

なぜ超選択則など考えるのか？

- 現実の物理系のモデルの中には，自己共役作用素であっても，対応する物理量が原理的に測定不可能なものがあるから．（次ページで述べる）
- そもそも「測定可能」とはどういうことなのか？という点も検討する必要がある．（後述）

測定不可能量の例

Wick, Wigner, Wightman (1952)

$\psi(x)$：Dirac 場の作用素（電子の生成消滅演算子）

これらは自己共役だが，どうにも測定できない：

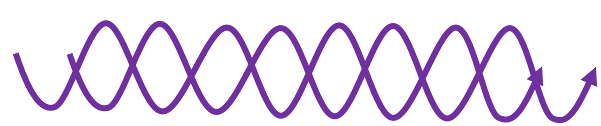
$$\frac{1}{2}(\psi + \psi^{\dagger}), \quad \frac{1}{2i}(\psi - \psi^{\dagger})$$

これらは自己共役，かつ測定可能量に対応している：

$$\psi^{\dagger}\psi, \qquad \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

電荷密度，電流密度に対応している．

電磁波は振幅も位相も測れるが，電子波（電子のde Broglie波）の絶対値は測れるが，位相は測れない．



ユニヴァレンス超選択則

univalence superselection rule

$J = R(2\pi) = e^{2\pi i J_z}$: 360°回転のユニタリ作用素

測定可能量 A は360°回転で不変でなければならない:

$$R(2\pi)^{\dagger} A R(2\pi) = A \text{ or equivalently, } [A, J] = 0$$

Diracスピノル場 ψ は360°回転で符号が変わる:

$$R(2\pi)^{\dagger} \psi R(2\pi) = -\psi, \qquad R(2\pi)^{\dagger} \psi^{\dagger} R(2\pi) = -\psi^{\dagger}$$

ψ そのものの測定は禁じられる. しかし, $\psi^{\dagger}\psi$ は360°回転不変であり, 測定可能.「測定可能なものはゲージ不変であるべし」という要請からも同様の結論が導かれる.

しかし, 本講演の目的は, これらの超選択則を天下り的ルールとせず, 力学法則の帰結として演繹すること.

数学概念 vs. 物理学概念

- 自己共役作用素 : 数学の概念
- 測定可能量 : 物理学の概念

これらは漏れなく一対一対応しているか？

von Neumannの場合,

測定可能量　⇒　自己共役作用素

自己共役作用素　⇒　測定可能量（こちらは自信なさげ）

von Neumann 『量子力学の数学的基礎』 IV.2節

- 井上・広重・恒藤 訳（1957年）

《量子力学的系の物理量に対して超極大なエルミート作用素を一意的に対応させられることは，我々の知っている通りであるが，それに加えて，これらの対応は一対一である，すなわち，すべての超極大エルミート作用素は現実に物理量に対応している，と仮定するのが都合がよい．》

- von Neumannドイツ語原文（1932年）

《... es ist zweckmässig anzunehmen, ...》

- Beyerによる英訳本（1955年）

《... it is convenient to assume, ...》

- Wightman による英訳（1995年）

《... it is appropriate to assume, ...》

別の問題意識：
物理量の和，有界でない
自己共役作用素の和

超選択則発見の時代背景

1950年頃，発見される素粒子の種類が増えて来た.

スピン0の粒子にスカラーと擬スカラーの区別があり，スピン1の粒子に極性ベクトルと軸性ベクトルの区別があるように，スピン1/2の粒子もパリティによる区別があるのではないか，ということが議論されるようなった.

スピン1/2の粒子を記述するDirac場のパリティ変換則は，

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \to \Pi\psi(\boldsymbol{x}, t) = e^{i\theta}\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x}, t)$$

位相因子$e^{i\theta}$は不定． $e^{i\theta} = \pm 1, \pm i$ に絞れるという説もあった.

当時知られていたスピン1/2の粒子は $\mathrm{p}, \mathrm{n}, \mathrm{e}^-, \mathrm{e}^+, \nu, \bar{\nu}$.

各粒子のパリティ型を決める実験方法はあるか？といったことをYangやFermiらが議論していた.

Wick, Wigner, Wightman は どうやって超選択則に気づいたのか？

- 結局，Dirac場そのものが測定できる量ではないので，Dirac場の値には不定性があってもよく，Dirac場のパリティ変換性も一意的に決まらなくてよいし，実験で決めることもできない，というのが答え．（ただし，パリティ保存則を仮定すれば，相対的なintrinsic parityは定義・測定可能）
- そうすると，測定できる量とできない量とを区別する規則がほしい．それが超選択則．
- Wigner と Wick は fermion-boson superselection rule と呼ぶのがよいと主張したが，Wightmanがunivalence superselection ruleがよいと押し通した．
- W^3は時間反転対称性を使って証明した．
- 後に Hegerfeldt, Kraus, Wignerが360°回転対称性を用いて証明

測定可能とはどういうことか？

A: 測りたいもの object observable

M : 読み取るもの meter, pointer, indicator

Aの値とMの値が等しければよい.

→ 誤差ゼロの要請

しかし, たいていの場合「Aの値」を直接知ることはできない.

Aの値を変えるような操作・変換を施したとき, Mの値もしかるべく変わってほしい.

→ 共変性 covariance の要請

注：言葉づかいについて

代数的場の量子論では

- observable algebra $\mathcal{A}$
- field algebra $\mathcal{F}$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{F})$

と呼んで区別をするものを，ここでは

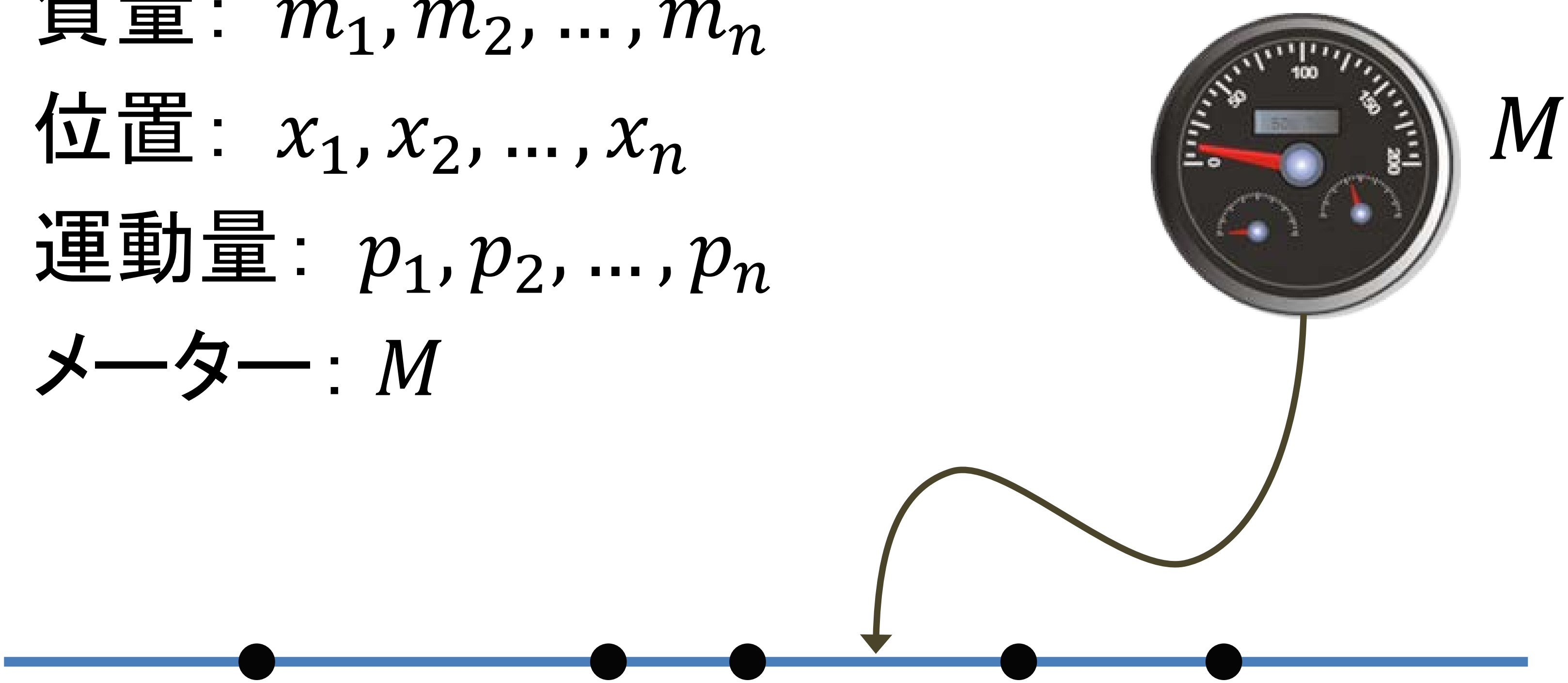
- measurable quantities, 測定可能量
- quantities, physical quantities, 物理量

と呼んでいる.

例：測定過程から超選択則を演繹する

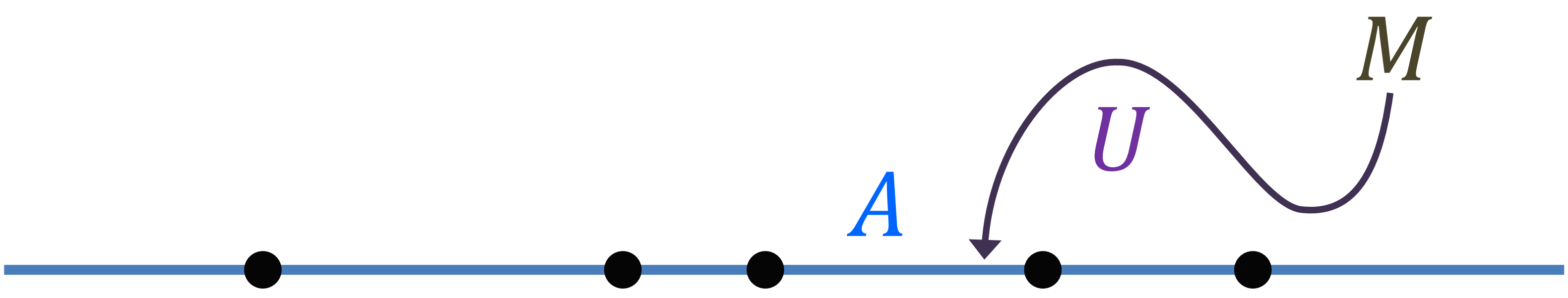
設定

- １次元空間に n 個の粒子
- 質量： $m_1, m_2, \ldots, m_n$
- 位置： $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- 運動量： $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- メーター： M



設定（続き）

- $\psi \in \mathcal{H}$: n粒子系の初期状態
- $\xi \in \mathcal{K}$: 測定器の初期状態
- U: 時間発展，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素
- A: $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素，それの値を知りたいが，直接にAの値は読み取れない．
- 相互作用後のメーター $U^\dagger M U$の値を読む．



重心の位置を測れるか？

- 質点系の重心の位置を測りたい:

$$A = X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

- 質点系の全運動量は保存すると仮定する:

$$J = P = \sum_{i=1}^{n} p_i , \qquad U^\dagger P U = P$$

- メーターは重心の位置に合わせて動くか？

$$U^\dagger M U = M + X$$

- 答え: それは無理.

証明

粒子系の全運動量は測定器の物理量と可換:

$$[P, M] = 0.$$

時間発展ユニタリ変換は代数同形変換なので

$$\left[U^\dagger P U, U^\dagger M U\right] = U^\dagger [P, M] U = 0.$$

一方で，測定過程で粒子系の全運動量は保存し，メーターは重心位置に合わせてシフトするとしたから，

$$\left[U^\dagger P U, U^\dagger M U\right] = [P, M + X] = [P, X] = -i\hbar.$$

矛盾を生ずる.

一般に，運動量保存則の下でメーターシフト条件

$U^\dagger M U = M + A$ を満たす A は

$[P, A] = 0$ を満たさなければならない

運動量超選択則

測定過程が全運動量$P=\sum_i p_i$を保存するならば，共変メーターによって測定可能な量 A は $[P,A]=0$ を満たす．

測定可能：相対座標や運動量

$$A=x_r-x_s,\qquad \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}-x_3,\qquad p_r$$

測定不可能：絶対座標

$$A=x_r,\qquad \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

General scheme which gives a rise of superselection rule

interaction

Object System

observable A

isolated conserved quantity $J \longrightarrow U^{\dagger} J U = J$

U

Apparatus (observing system)

meter $M \longrightarrow U^{\dagger} M U = M + A$

Proof

$$
\begin{aligned}
&[J, M] = 0, \\
&0 = U^{\dagger}[J, M]U \\
&\qquad = \left[U^{\dagger} J U, U^{\dagger} M U\right] \\
&\qquad = [J, M + A] \\
&\qquad = [J, A] \\
&\therefore [J, A] = 0.
\end{aligned}
$$

This argument is based on the translation group but it is generalized to an arbitrary paracompact group. Please see my paper for detail.

対称性と超選択チャージ

- 2π 回転 / univalence charge（bosonには＋1，fermionには－1を割り当てるような乗法的保存量）
- U(1) 不変性 / 電荷，バリオン数，レプトン数

  この超選択則のせいで電子や中性子の物質波の位相は測れない.
- 注意 : 光子数は保存しないので，電磁波の位相の測定を妨げる超選択則はない.

非可換群に伴うパラドクス

SO(3) 回転対称性は角運動量 J_x, J_y, J_z の保存を意味する. しかもこれらは互いに非可換.

そうすると, 角運動量の測定は不可能なのか？

しかし, 実際には光子や電子のスピン角運動量の成分は測られている.

どうしてそのようなことができるのか？

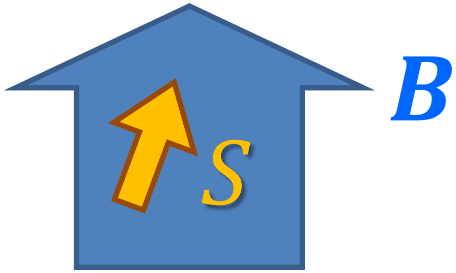
パラドクスではない

SO(3)回転対称性は外場や媒体によって破られる.

電子や原子核に対しては磁場 (Zeeman effect or Stern-Gerlach setting), 光子に対しては偏光フィルターや複屈折結晶など.

角運動量を測る実験はすべて，対象系と測定器のカップリングによって，対象の角運動量の孤立的保存を破り，角運動量のやりとりを可能にしている.

$$H = g\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$[H, \boldsymbol{S}] \neq 0$$

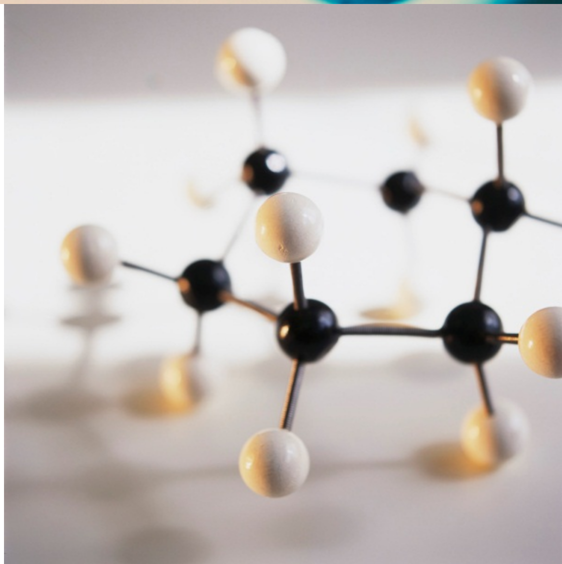


$$H = g\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$$
$$[H, \boldsymbol{S}] \neq 0$$
$$[H, \boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}] = 0$$

回転不変でない物理量をなぜ測れるのか？

もしも回転対称性がミクロ世界で保たれていたら，我々は系の外から，回転不変でない物理量を測ることはできない．

実際には，マクロ世界では回転対称性は自発的に破れている．我々の世界には球対称でない物体がたくさんあり，球対称ではない測定装置をこしらえて，球対称でない外場をミクロ系に印加して，ミクロ系の回転不変性を陽に破ることができる．だから超選択則を乗り越えることができる．

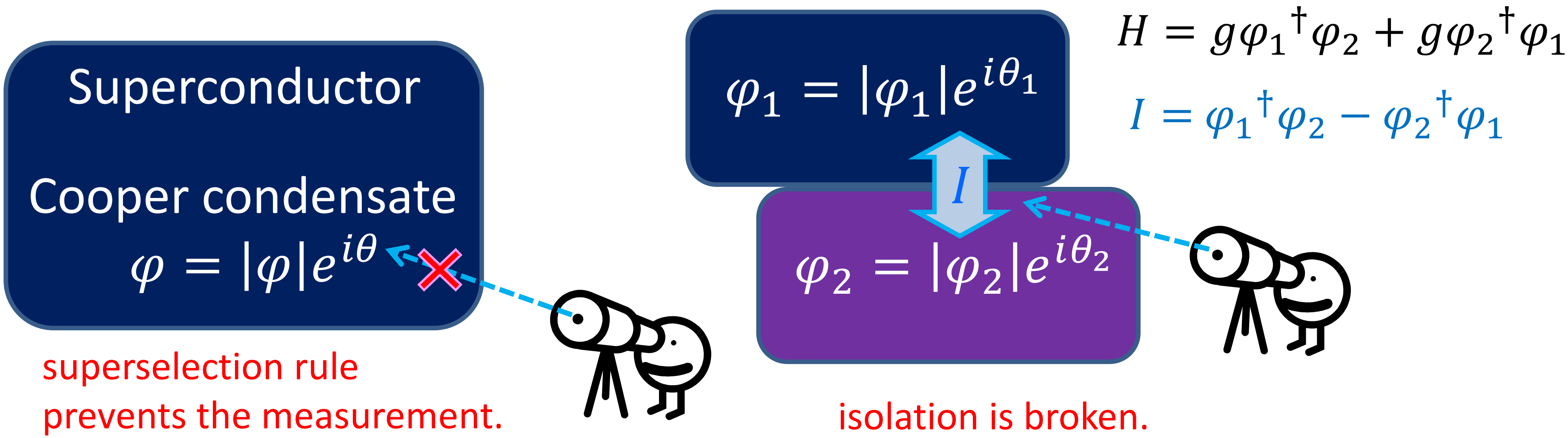


U(1) 超選択則をどうやって乗り越えるか？

U(1)チャージの孤立保存則はゲージ可変量の測定を邪魔する.

ということは，孤立を破れば，測れる.

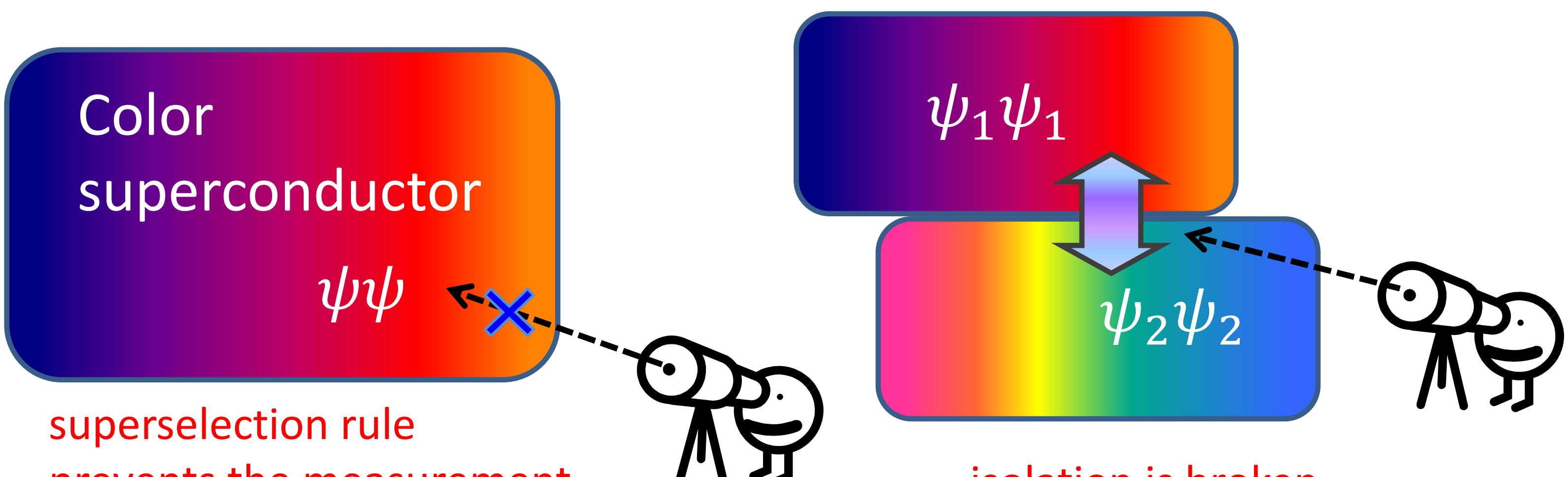
例えば，超伝導体の Josephson 接合



SU(3) カラーはなぜ見えないか？

QCD では quark や gluon場のようにSU(3)で非自明な変換をする量は測れない．しかも SU(3) は非可換群なので，カラーチャージそのものが測定できない．

しかし，カラー対称性が自発的に破れた物体を2つ持って来て接触させることができたら，それらの相対的なカラーは見ることができる．



superselection rule prevents the measurement.

isolation is broken.

保存則の下での不確定性関係: Wigner-Araki-Yanase-Ozawa theorem

A : 測りたい量

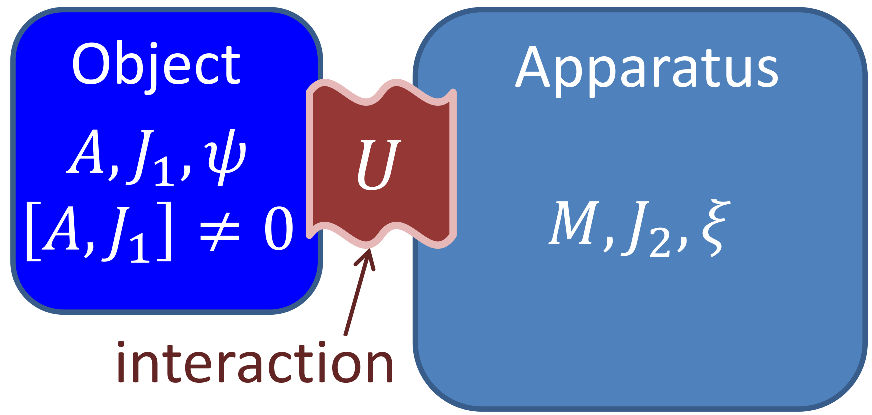
M : 測定器のメーター物理量

J_1 : 対象系の物理量

J_2 : 測定器の物理量

U : 時間発展ユニタリ作用素

$\Omega = \psi \otimes \xi$: 複合系の初期状態



$\varepsilon(A)^2 = \left\langle \Omega \left| \left(U^\dagger M U - A \right)^2 \right| \Omega \right\rangle$: 測定誤差

$\sigma(J_1)^2 = \langle \Omega | (J_1)^2 | \Omega \rangle - \langle \Omega | J_1 | \Omega \rangle^2$: 標準偏差

加法的保存則の仮定: $U^\dagger (J_1 + J_2) U = J_1 + J_2$

定理:
$$\varepsilon(A)^2 \geq \frac{|\langle [A, J_1] \rangle|^2}{4\{\sigma(J_1)^2 + \sigma(J_2)^2\}^2}$$

WAY-Ozawa定理と超選択則の比較

WAY-Ozawa定理:

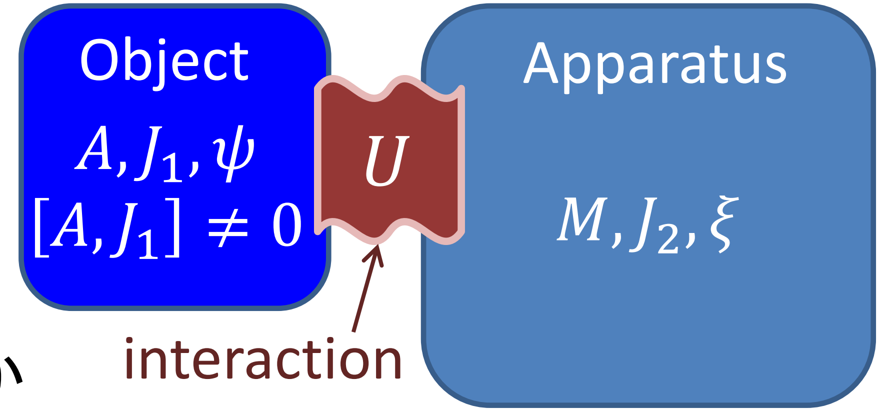
全チャージの保存則

$$U^\dagger(J_1+J_2)U=J_1+J_2$$

の下で，どの程度の測定誤差

$\varepsilon(A)$を覚悟しなければならないか

教えてくれる.



超選択則: 孤立的保存則

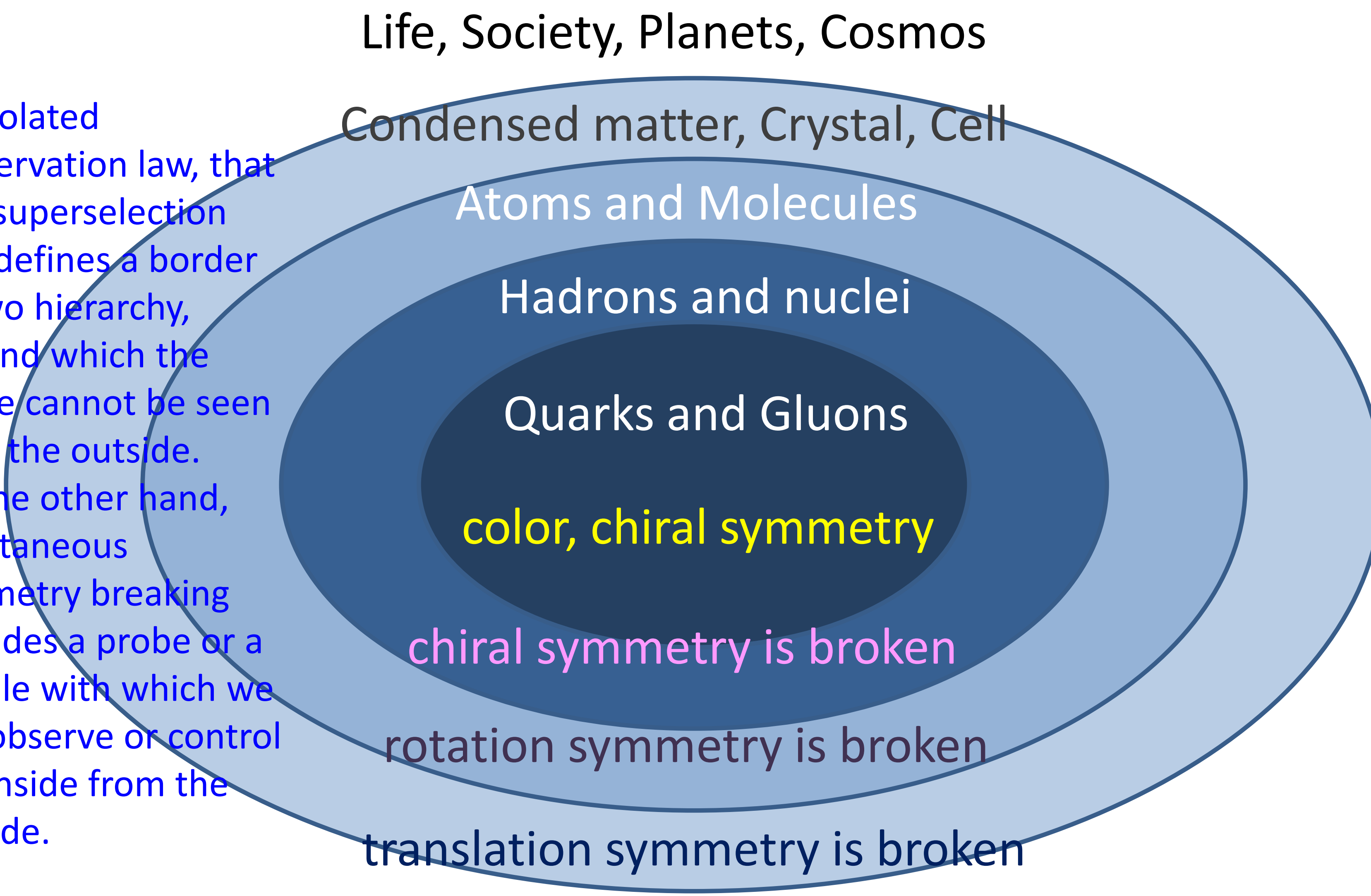
$$U^\dagger J_1 U=J_1$$

の下で，非可換量Aを共変的測定 $M \longrightarrow U^\dagger M U = M + A$ しようとしても無理だよ，と教える.

誤差・擾乱の不確定性関係の最強ケースとみなせる.

Hierarchical structure of the nature

An isolated conservation law, that is, a superselection rule defines a border of two hierarchy, beyond which the inside cannot be seen from the outside.
On the other hand, spontaneous symmetry breaking provides a probe or a handle with which we can observe or control the inside from the outside.



“More is different” picture à la P. W. Anderson

まとめ

- 不確定性関係は，$[A, J] \neq 0$のとき，物理量 Jの値を乱すことなくAの値を正確に測ることはできないことを教える．
- もし何らかの理由によって（対称性がその理由になる．自然界に存在する相互作用の種類は限られており，測定過程相互作用にも対称性が課せられる）J の孤立的保存則が成り立つなら，つまり，Jの擾乱を禁じられるなら，Aの測定は不可能になる．これが超選択則である．
- 対称性の自発的破れ，あるいは陽な破れを起こせば，孤立保存も破ることができて，超選択則を乗り越えて測定可能量のクラスを広げることができる．
- 孤立保存則は「系の内側と外側の境界線」を規定し，対称性の自発的破れは，対称性を破る新たなマクロ変数を提供する．これらが自然界の階層構造を形成している．